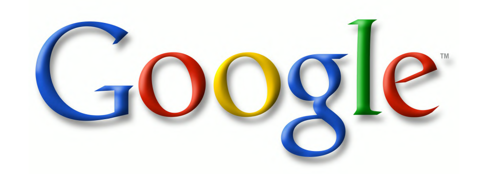
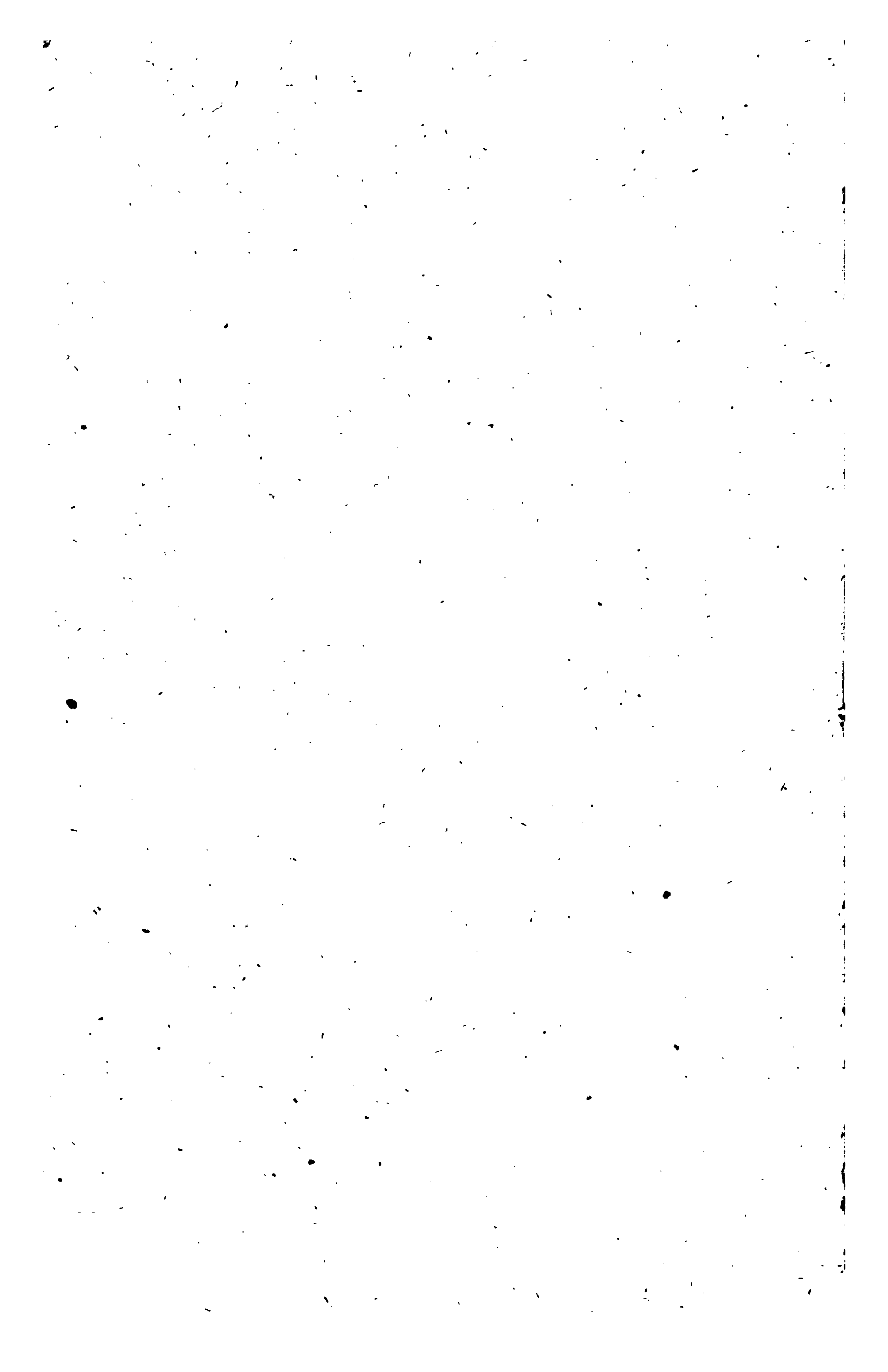


R. Lipschitz.



Versuch

einer neuen

Summationsmethode

nebst andern damit zusammenhängenden

analytischen Bemerkungen.

Von

Johann Friedrich Pfaff.

Cum doctrina de seriebus maximi sit momenti in analysi, ejusmodi speculationes omnino dignae sunt habendae, quae omni industria excolantur.

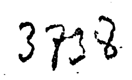
L. EULER.

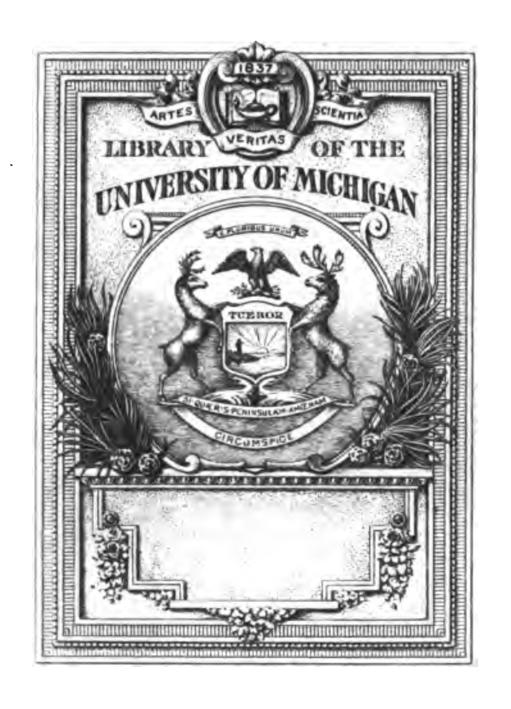
Berlin, 1788.
Bei Christian Friedrich Himburg.

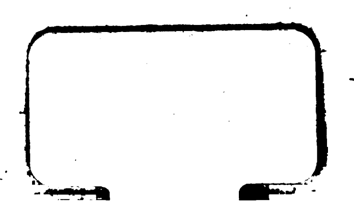
Durchlauchtigster Herzog!

Gnädigster Herzog und Herr!

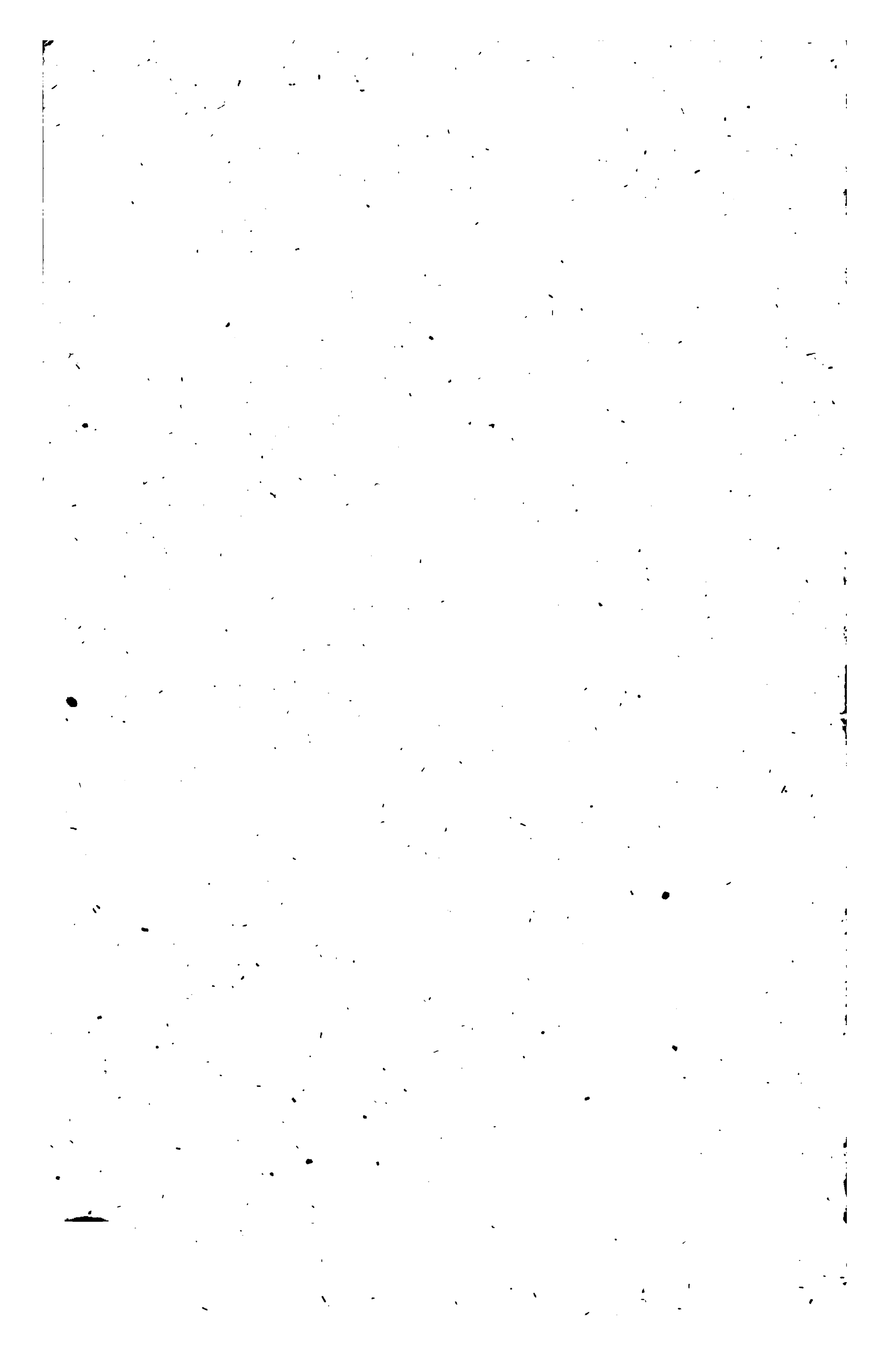
Euer Herzogl. Durchlaucht geruhen gnädigst, gegenwärtigen Versuch als ein geringes, aber reines Opfer der tiefsten Verehrung und lebhaftesten Dankbarkeit huldreichst aufzunehmen. Ich ergreife diese Gelegenheit — nicht um die Lob-




1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



R. Lipschitz.



Versuch
einer neuen
Summationsmethode
nebst andern damit zusammenhängenden
analytischen Bemerkungen.

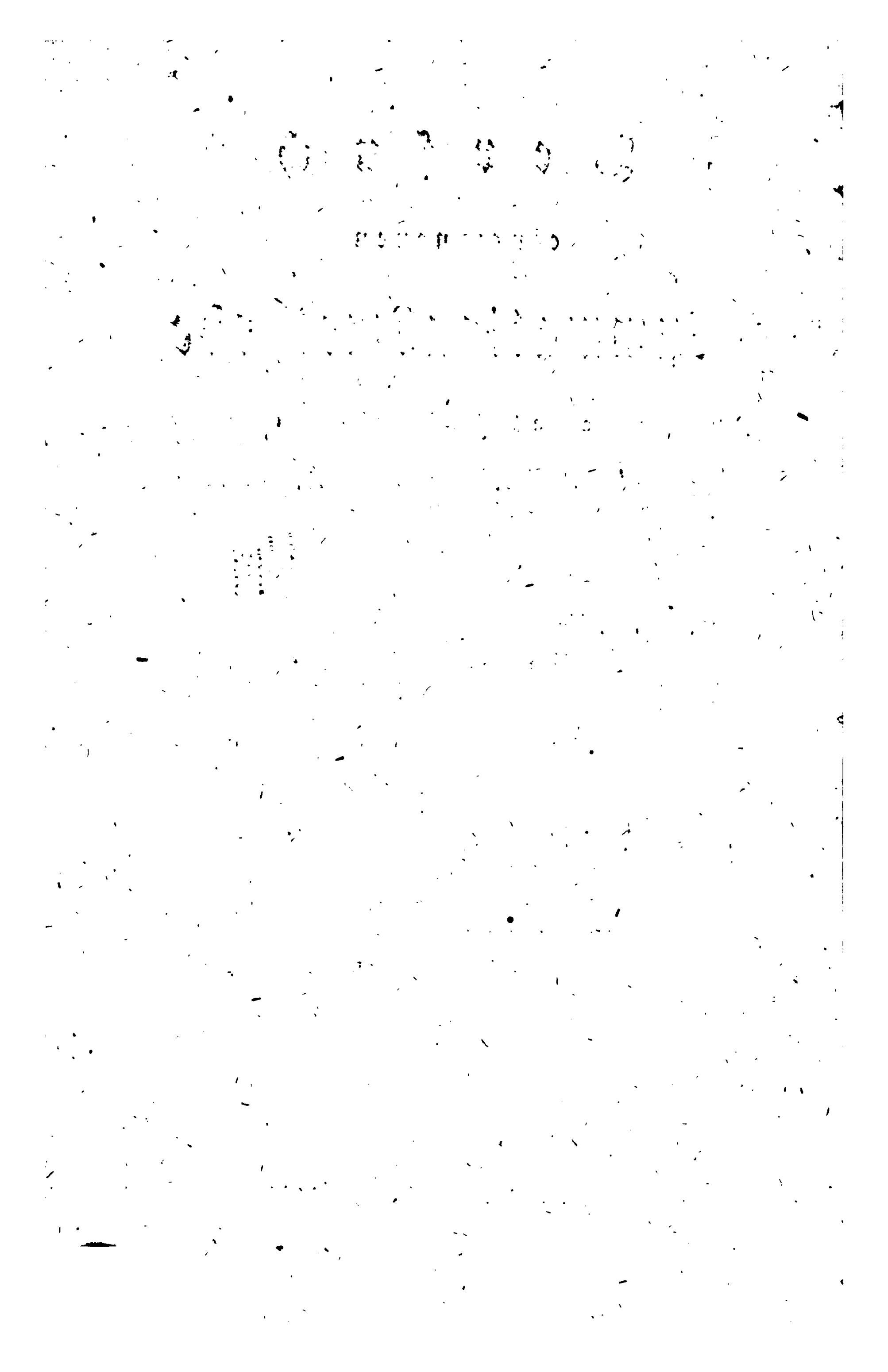
Von

Johann Friedrich Pfaff.

Cum doctrina de seriebus maximi sit momenti in analysi, ejusmodi speculationes omnino dignae sunt habendae, quae omni industria excolantur.

L. EULER.

Berlin, 1788.
Bei Christian Friedrich Himburg.



Dem

Durchlauchtigsten

regierenden

Herrn Herzog Carl

zu Würtemberg und Teck ꝛc. ꝛc.

weyhet diese Schrift

in tiefster Unterthänigkeit

der Verfasser.

Durchlauchtigster Herzog!

Gnädigster Herzog und Herr!

Euer Herzogl. Durchlaucht geruhen gnädigst, gegenwärtigen Versuch als ein geringes, aber reines Opfer der tiefsten Verehrung und lebhaftesten Dankbarkeit huldreichst aufzunehmen. Ich ergreife diese Gelegenheit — nicht um die Lob-

sprüche zu wagen, welche ein **Erlauchter** Kenner und Beförderer der Wissenschaften verdienet, aber wenig achtet. Eine heiligere und unverdächtigere Pflicht war für mich entscheidender Beweggrund, — die Pflicht der Dankbarkeit. Ich fühlte mich gedrungen, **Höchstdenenselben** öffentlich den tiefsten Dank unterthänigst darzulegen: für die Erziehung welche ich zehn Jahre lang in jener Anstalt genossen habe, die, zugleich mit dem Andenken ihres **erhabenen Stifters**, so vielen darinn gebildeten Zöglingen, auch mir, unvergeßlich bleiben wird; für die besondere Gnade, womit **Euer Herzogl. Durchlaucht** auch nachher an den fernern Fortschritten meiner Bildung

höchsten Antheil zu nehmen, und mich auf der dahin abzielenden Reise huldreichst zu unterstützen geruhet haben. — Ich kenne keine reinere Befriedigung meines Dankgefühls, als anhaltenden und wirksamen Eifer, das Gepräge meiner Erziehung nicht zu verläugnen, jener Gnade würdiger, und durch Erweiterung meiner Kenntnisse, in dem Fache, zu dessen Bearbeitung mich **Höchstdieselbe** gnädigst aufgemuntert haben, nach dem Maaße meiner Kräfte nützlicher zu werden. Möchten **Euer Herzogl. Durchlaucht** gnädigst geruhen, auch in dieser öffentlichen Probe meiner wissenschaftlichen Bemühungen, eine Wirkung jenes Eifers zu erkennen, und bei der Güte der

Absicht die Mängel der Ausführung mit nachsichtsvoller Huld zu entschuldigen!

Ich verharre in tiefster Ehrfurcht

Euer Herzogl. Durchlaucht

unterthänig gehorsamster

Johann Friedrich Pfaff.

Vorbericht.

Der Gedanke, welcher die erste Veranlassung zu nachfolgender Schrift wurde, ist dieser: Summen unendlicher Reihen dadurch zu finden, daß man ihre einzelne Glieder selbst in unendliche Reihen auflößt. Auf den ersten Blick scheint dieses Verfahren die Schwierigkeit zu vergrößern, welche gehoben werden soll, und vielleicht mag das der Grund gewesen seyn, warum dasselbe bisher weniger ist gebraucht worden. Man wird gewissermaßen überrascht, wenn man sich auf diesem Wege so bald am Ziele findet. — Die mannichfaltigen Anwendungen dieser Methode findet man in der Schrift selbsten, durchflochten mit andern damit verwandten Zwischen-Untersuchungen, welche mir, zum Theil, einigermaßen neu, theils in einen andern als den gewöhnlichen Zusammenhang gestellt zu seyn schienen. Jene Anwendungen habe ich, wie man bald

sehen wird, nicht erschöpft, die Untersuchungen nicht alle gänzlich vollendet. Zuweilen begnügte ich mich damit, die Gründe überhaupt anzuzeigen, ohne mich in das Detail der Rechnungen einzulassen: z. B. in (XII), wo die sogenannten reciproken Reihen, bei denen ich jenes Verfahren zuerst versuchte, in einer größern Allgemeinheit betrachtet werden; in (XIX), wo Reihen von Bögen untersucht sind, deren Tangenten nach einem gewissen Gesetze fortschreiten, durch eine Methode, dergleichen Euler gewünscht hatte. An beiden Stellen, auch sonst, habe ich wenigstens darzuthun gesucht, worauf es bei der Sache ankomme, und welche Ideen zum Grunde liegen. Solche analytische Ideen sind eigentlich Aussichten, welche man schon in einiger Entfernung bequem gewahr werden, obgleich nicht eher völlig erreichen kann, bis man sich durch das Medium resistens verwickelter Rechnungen durchgearbeitet hat. Dagegen ist es auf der andern Seite leicht geschehen, daß man sich in der Region der Zeichen verirrt, und das feste Land deutlicher Begriffe aus dem Gesichte verliehrt. Die Spuhr dahin hie und da wenigstens anzudeuten, schien mir nicht überflüssig; in einer Lehre, welche, nach dem Urtheile philosophischer Mathematiker, eben aus jenem Grunde noch

nicht von allen Zweifeln befreit ist. — An manchen Stellen habe ich nur den Gang der Rechnungen dargelegt, und die endlichen Resultate beigefügt. —

Die erwähnten, und vielleicht andere Anomalien des Vortrags zu erklären, überhaupt, den Gesichtspunkt für die Beurtheilung dieser Schrift genauer zu bestimmen, finde ich für dienlich, anzuzeigen, daß sie, ihrer Entstehung nach, ein Fragment ist von ausführlichern Untersuchungen über die Lehre von den Reihen und ihren Summen, mit welchen ich mich in Göttingen zu beschäftigen angefangen hatte, und, bei dem Reichthume der daselbst befindlichen litterarischen Hülfsmittel jeder Art, desto leichter beschäftigen konnte. Gegenwärtigen Aufsatz habe ich, als eine Probe, der königl. Societät der Wissenschaften, vor meiner Abreise übergeben; Ihr Urtheil, viel günstiger, als ich es erwarten durfte, und insbesondere der aufmunternde gütige Rath Herrn Hofrath Kästners, haben mich veranlaßt, denselben öffentlich bekannt zu machen. Veränderungen, so weit sie die Kürze der Zeit erlaubte, schienen mir zu dieser Absicht nothwendig, um in vermischte Bemerkungen mehr Einheit und Folge zu bringen, und ein gewisses Ganze daraus zu bilden; auch ist manches beigefügt, was ich erst

nachher entwickelt habe. — Die sonst nicht sehr gewöhnliche Bezeichnungsart unendlicher Reihen und ihrer Summen, wählte ich, außer andern zufälligen Gründen, deswegen, weil dadurch der Vortrag ungemein abgekürzt, und die allgemeine Uebersicht sehr erleichtert wird. — Litterarische Nachrichten habe ich überall eingestreut, vornehmlich aus dem Grunde, weil ich es für eine Schuldigkeit, zumal eines angehenden Schriftstellers halte, zu zeigen, daß er sich mit dem vorzüglichsten, was über den Gegenstand seines eigenen Nachdenkens ist geschrieben worden, wenigstens eh' er seine Ideen öffentlich vorlegt, bekannt zu machen gesucht habe. In der Analysis ist diese Vorsicht um so nothwendiger, da sie ihre Kenner besonders in den Stand setzt, Wahrheiten für sich zu erfinden, die vielleicht von andern vorher sind erfunden worden; wobei man das Vergnügen, etwas zuerst zu wissen, mit demjenigen vertauschen muß, gleiche Gedanken mit andern vortrefflichen Männern zu haben.

Berlin, im September 1787.

Littera-

I. Litterarische Nachrichten.

1) Unter einer Menge unendlicher Progressionen, deren Summen mit der Quadratur des Kreises zusammenhängen, haben die reciproke Reihen der geraden Potenzen der natürlichen Zahlen die Aufmerksamkeit der Analysten vorzüglich auf sich gezogen. Ihre allgemeine Form ist: $1 \pm \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} \pm \frac{1}{4^{2m}} + \&c.$ in inf. Johann Bernoulli und Euler *) haben zuerst ihre Summen zu finden gelehrt, welche des erstgenannten älterer Bruder eifrig, aber vergebens gesucht hatte **).

*) Joh. Bernoulli opp. T. IV. n. 153. Art. 8. — Euler de summis serierum reciprocarum, Comment. Acad. Petrop. T. VII. p. 124 — Beyde bedienen sich der gleichen Methode, auf die, wie es scheint, jeder für sich gerathen ist. Die Gründe, auf welchen der ganze Beweis unmittelbar beruht, sind von Joh. Bernoulli entdeckt worden. — Sonst wird man in den Werken dieses großen Mannes (er war im Calcul vielleicht der erste seiner Zeit) nicht selten Ideen finden, welche Euler nachher nur weiter ausgeführt hat, freylich auf eine Art, wodurch sie gewissermassen sein Eigenthum werden.

**) Jacob Bernoulli de seriebus infin. pag. 254. „Si quis inveniat nobisque communicet, quod industriam nostram elusit hactenus, magnas de nobis gratias feret" — Joh. Bernoulli, als er gefunden hatte, was seinem Bruder verborgen blieb, wünschte ihn wieder ins Leben zurück, um das Vergnügen dieser Entdeckung mit ihm theilen zu könne. „O utinam frater superstes esset" (l. c.)

Gegen ihre Methode, wobey die Betrachtung unzähliger für einen Sinus oder Cosinus gehörigen Bogen zum Grunde liegt *), machten **Dan. Bernoulli** und **Cramer** Einwendungen, wodurch **Euler** veranlaßt wurde, eine neue überzeugendere Methode aufzusuchen, welche er zuerst in den Miscell. Berolin. (T. VI.) vortrug. Sie setzt andere von ihm entdeckte Summationen voraus, die aus particularen Werthen gewisser Integrale abgeleitet sind. — Auf eben diesem Grunde beruhet ein ähnliches Verfahren in den Opusc. Analyt. (Petrop. 1785.) Tom. II. p. 257. &c. **Euler** hält dasselbe für neu, und sagt, die verschiedenen Arten, wie er sonst jene Reihen summirt habe, beruhen alle auf einer mit andern analytischen Operationen weniger übereinstimmenden Methode, nemlich auf der erwähnten Betrachtung der Sinusse; wobey er sich also an die nur angeführte Abhandlung nicht erinnert zu haben scheint, auch nicht an seinen Beweis in den Instit. Calc. Differ. Cap. V. P. II. p. 43, welcher mit dem in den Opusc. völlig übereinstimmt **).

*) Eben diese Methode findet sich sonst in mehrern andern Schriften, z. B. in *Landens* Mathematical Lucubrations (London 1755) p. 36. &c. mit fernern Anwendungen auf Summen anderer Reihen; in *Warings* Meditat. Analyt. (Cantabr. 1785); in *Ferroni* Nova Theoria Trigonometr. subl. &c, einem großen Werke, was, als ein Inbegrif wichtiger analytischen Entdeckungen, in Italien mit den übertriebensten Lobsprüchen ist angekündigt worden — zwar an weitschweifigen und verwirrten Rechnungen überflüßig reich, aber an neuen gründlichen Ideen arm ist —

**) Nicol. Bernoulli (Johanns Sohn, welcher den Wissenschaften viel zu frühe entrissen wurde) ist bey der Summirung dieser Reihen einen ganz eigenen Weg gegangen. Sein Verfahren ist sinnreich, aber allzu verwickelt und nur auf den einfachsten Fall anwendbar. — Er bringt, nach mehrern Verwand-

2) Wenn man die Summe der Reihe: $\cos. \varphi \pm \cos. 2\varphi + \cos. 3\varphi \pm \cos. 4\varphi$ &c. als bekannt voraussetzt, so ergeben sich daraus durch fortgesetzte Integrationen die Summen anderer Reihen, welche unter diesen zwoen Formen begriffen sind:

$$\cos. \varphi \pm \frac{\cos. 2\varphi}{2^{2m}} + \frac{\cos. 3\varphi}{3^{2m}} \pm \frac{\cos. 4\varphi}{4^{2m}} + \&c.$$

$$\text{f.}\varphi \pm \frac{\text{f. } 2\varphi}{2^{2m-1}} + \frac{\text{f. } 3\varphi}{3^{2m-1}} \pm \frac{\text{f. } 4\varphi}{4^{2m-1}} + \&c.$$

Die Constanten, welche bey jedesmaliger Integration in Rechnung genommen werden müssen, beruhen auf denen in (1) erwähnten Reihen. Nimmt man aber dieser ihre Summen noch nicht als bekannt an, so findet man dieselbigen eben durch dieses Verfahren, wenn man zur Bestimmung der Constanten zween Werthe des veränderlichen Winkels gehörig auswählt.

3) Diese Bemerkung hat Daniel Bernoulli zuerst gemacht, nnd Euler (der den Gedanken für merkwürdig hielt) weiter ausgeführt, auch zu andern Absichten angewandt *). — Eh' ich dieses Verfahren von Bernoulli lernte, und das Ansehen dieses großen Mathematikers mein eigenes Urtheil zurückhalten konnte, schien mir dasselbe zwar einfacher und überzeugender als das Eulerische (1), aber darin diesem nachzustehen, daß man das Gesetz der Summen, welches wenigstens für die eine Art von Reihen, nemlich für die in (1), Euler schicklich aus-

lungen, die Summation für diesen Fall auf die Integration einer Differential-Gleichung des zweyten Grades (Comment. Petrop. T. X).

*) Comment. Petrop. nov. Tom. XVII. XIX.

gedrückt und erwiesen hat, nicht in gehöriger Allgemeinheit bequem übersehen kann. Bernoulli gesteht diese Schwürigkeit selbst, ohne sie aufzulösen *). Auch Euler hat eine solche Vollkommenheit jener Methode nicht gegeben: und da seine eigene nur die Reihen in (1) betrift, so wäre zumal bey denen in (2) eine genaue vollständige Darstellung, und ein allgemeiner Erweis des Gesetzes nothwendig gewesen.

4) Diese Betrachtung veranlaßte mich zu nachfolgender Methode: welche weder Integrationen, noch Summationen anderer minder bekannten Reihen voraussetzt, sondern nur auf einer einfachen Combination zweener auch sonst gebräuchlichen Sätze beruht. Man löset nemlich die Sinusse und Cosinusse von φ, 2φ u. s. w. in unendliche Reihen auf, ordnet diese zusammen nach den Potenzen von φ, und gebraucht dabey nur noch den Satz, daß für gerade bejahte m, die Summe der unendlichen Reihe: $1 - 2^m + 3^m$ &c. oder $\Sigma \pm n^m = 0$ sey **). Auf diese Weise ergiebt sich sogleich ein allgemeiner Ausdruck für die Summen der Reihen in (2); man übersieht ihren Zusammenhang mit den Progressionen in (1), und kann daraus unmittelbar auch für diese das Gesetz der Summen ableiten. — Da das Verfahren, welches dabey zum Grunde liegt, so viel ich weiß, noch von keinem der

*) — — Quamquam hac de re legem condere generalem opus difficile putem — (l. c.) *J. Landen* in den Mathematical Memoirs (Lond. 1780) gebraucht auch die Bernoullische Methode, doch ohne einen allgemeinen Ausdruck dadurch zu geben —

**) *Euler* Instit. Calc. Differ P. II p. 500. — Es sey mir verstattet, bey den nachfolgenden Untersuchungen immer (wenn nicht etwas anders ausdrücklich erinnert wird) durch das Zeichen Σ die Summe einer unendlichen Reihe anzudeuten, deren allgemeines Glied diejenige Function des

vielen Schriftsteller, welche über Reihen von Cosinussen und Sinussen geschrieben haben, gebraucht worden ist, und analogisch auch in mehrern andern Fällen, deren einige unten vorkommen sollen, mit Vortheil angewandt werden kann — so schien mir die Entwicklung desselben auch nach diesen Rücksichten nicht überflüßig zu seyn. —

II. Einzelne Fälle der Reihe (I. 2.).

Obgleich das allgemeine Gesetz der Summen dieser Reihen, von der Entwicklung einzelner Fälle unabhängig ist, und nicht erst aus diesen durch allmähliges Fortschreiten gebildet werden muß, so wird es doch zur leichtern Uebersicht des ganzen Verfahrens dienlich seyn, die zween einfachsten Fälle im voraus abgesondert zu betrachten. Es ist gleichgültig, ob man mit den Cosinussen oder Sinussen den Anfang macht. Ich wähle das letztere.

1.) Nun für den einfachsten Fall $m = 1$ findet sich durch das im allgemeinen angezeigte Verfahren, die Summe der Reihe;

$$\text{f.}\ \varphi - \tfrac{1}{2}\ \text{f.}\ 2\ \varphi + \tfrac{1}{3}\ \text{f.}\ 3\ \varphi - \text{\&c. in inf.} = S$$

also: man gebrauche statt der Sinusse ihre Ausdrückungen durch unendliche Reihen, so verwandelt sich jene Reihe in folgende:

Indicis n ist, welche nach dem Zeichen geschrieben steht. So ist also $\Sigma\ N$ die Summe aller Werthe von N, von $n = 1$ an bis $n =$ inf. genommen. Unter $\Sigma \pm N$ verstehe ich die Summe einer unendlichen Reihe mit abwechselnden Zeichen, deren erstes Glied bejaht, das andere verneint ist u. s. w. — Ich wähle diese Bezeichnungsart, weil dadurch der Druck ungemein erleichtert, und viel Raum erspart wird. — Auch ist sie an sich ganz verständlich, und zur allgemeinen Uebersicht bequem. —

$$\varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1\ldots5} - \&c.$$

$$-\tfrac{1}{2}\left(2\varphi - \frac{2^3\varphi^3}{1.2.3} + \frac{2^5\varphi^5}{1\ldots5} - \&c.\right)$$

$$+\tfrac{1}{3}\left(3\varphi - \frac{3^3\varphi^3}{1.2.3} + \&c.\right)$$

$$- \&c.$$

Ordnet man nach den Potenzen von φ, so wird der Coefficient der ersten Potenz, $= 1 - 1 + 1$ &c. in inf. $= \frac{1}{2}$; der 2ten, $= \frac{-1}{1.2.3} \Sigma \pm n^2 = 0$ (nach dem in I. 4. angeführten Satze.) Eben so verschwinden die Coefficienten-Reihen der höhern Potenzen: Also bleibt $S = \Sigma \pm \frac{1}{n}$ f. $n\varphi = \frac{\varphi}{2}$. Setzt man vor φ, $\pi - \varphi$: so entsteht daraus; $\Sigma + \frac{1}{n}$ f. $n\varphi = \frac{\pi - \varphi}{2}$.

2. Es sey ferner $m = 2$, so wird durch das nur gebrauchte Verfahren $\Sigma \pm \frac{1}{n^3}$ f. $n\varphi = S$ in folgende unendlichen Ausdrückungen verwandelt:

$$\varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1..5} - \&c. \text{ in inf.}$$

$$-\frac{1}{2^3}\left(2\varphi - \frac{2^3\varphi^3}{1.2.3} + \frac{2^5\varphi^5}{1..5} - \&c.\right)$$

$$+\frac{1}{3^3}\left(3\varphi - \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

Ordnet man solche nach den Potenzen von φ, so wird der Coefficient der ersten Potenz $= \Sigma \pm \frac{1}{n^2}$; der dritten $= \frac{-1}{1.2.3} \Sigma \pm n^0 = \frac{-1}{12}$; der fünften $= \frac{+1}{1..5} \Sigma \pm n^2 = 0$. Gleicherweise fallen die höhern Potenzen weg. Also wird $S = \varphi . \Sigma \pm \frac{1}{n^2} - \frac{\varphi^3}{12}$. Man setze $\varphi = \pi$, so ist, weil $\text{f.}\, m\pi = 0$, auch $S = 0$, also $\Sigma \pm \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Daraus folgt die Summe eben dieser Reihe mit gleichen bejahten Zeichen unmittelbar: sie ist nemlich, wie eine leichte Betrachtung zeigt, doppelt so groß als die nur gefundene Summe; also $\Sigma \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ — Ferner wird $S = \frac{\pi^2 \varphi - \varphi^3}{12}$, und statt φ, $\pi - \varphi$ gesetzt:

$$\Sigma \frac{1}{n^3} \text{f.}\, n\varphi = \frac{\pi^2 (\pi - \varphi) - (\pi - \varphi)^3}{12}.$$

III. Allgemeine Summation.

1) Aus der Entwicklung dieser zween Fälle übersieht man leicht, worauf es bey gegenwärtigem Verfahren im allgemeinen ankommt. Für jedes ganze m sey die Summe der unendlichen Reihe: $\text{f.}\, \varphi - \frac{\text{f.}\, 2\varphi}{2^{2m-1}} + \frac{\text{f.}\, 3\varphi}{3^{2m-1}} - \&c. = S = \Sigma \pm \frac{\text{f.}\, n\varphi}{n^{2m-1}}$. Man löse die Sinusse in ihre Progressionen auf, und ordne solche nach den Potenzen von

φ, so ist sichtbar, daß die Coefficienten-Reihen dererjenigen Potenzen, welche einen größern Exponenten als $2m-1$ haben, verschwinden: die Summe der letzten Reihe, welche übrig bleibt, und zu der $2m-1$ten Potenz gehört, ist $=\frac{1}{2}$; die Summe der vorhergehenden $=\Sigma\pm\frac{1}{n^2}$; u. s. w. Also wird $S=\varphi\,\Sigma\pm\frac{1}{n^{2m-2}}$

$$-\frac{\varphi^3}{1.2.3}.\Sigma\pm\frac{1}{n^{2m-4}}+\&c.\mp\frac{\varphi^{2m-3}}{1.2\ldots2m-3}\Sigma\pm\frac{1}{n^2}$$
$$\pm\frac{\varphi^{2m-1}}{1\ldots2m-1}.\frac{1}{2}.$$

2) Man setze $\varphi=\pi$, so wird (wie in II. 2.) $S=0$, also mit π^{2m-1} dividirt, und statt m, $m+1$ geschrieben:

$$0=\pi^{-2m}\,\Sigma\pm\frac{1}{n^{2m}}-\frac{\pi^{-2m+2}}{1.2.3}.\Sigma\pm\frac{1}{n^{2m-2}}+\&c.$$
$$\mp\frac{\pi^{-2}}{1\ldots2m-1}.\Sigma\pm\frac{1}{n^2}\pm\frac{1}{1\ldots2m+1}.\frac{1}{2}$$

Diese Gleichung drückt auf eine einfache leicht zu übersehende Weise das Gesetz aus, nach welchem die Summen der reciproken Reihen der geraden Potenzen natürlicher Zahlen, mit abwechselnden Zeichen fortgehen. Euler *) hat dasselbe Gesetz, durch die vorhin erwähnte Methode, herausgebracht: die Uebereinstimmung mit dem gegenwärtigen zeigt eine leichte Vergleichung. Er setzt gleich Anfangs, wenn ich statt der dortigen Zeichen, die meinigen gebrauche, $\Sigma\pm\frac{1}{n^2}=A\pi^2$; $\Sigma\pm\frac{1}{n^4}=B\pi^4$ u. s. w. und findet so eine Gleichung zwischen A, B u. s. w.

*) Opusc. Analyt. Tom. II. l. c.

Jenes schien mir hier nicht verstattet zu seyn, weil man dabey die Form der Summen, und ihren Zusammenhang mit der Quadratur des Kreises schon als bekannt voraussetzt: welche Voraussetzung erst durch den Beweis selbst gerechtfertiget wird.

3) Setzt man in (1) vor φ, $\pi - \varphi$, so ergiebt sich daraus $\Sigma . \frac{\text{f.}\, n\varphi}{n^{2m-1}}$, oder die Summe der dortigen Reihe mit gleichen bejahten Zeichen; durch einen Ausdruck, welcher nach den Potenzen von $\pi - \varphi$ fortgeht. Entwickelt man die letztern, so erhält jene Summe ($=S$) folgende Form:

$$S = \alpha\varphi + \beta\varphi^2 + \gamma\varphi^3 + \&c.\ldots + \delta\varphi^{2m-3} + \varepsilon\varphi^{2m-2} + \zeta\varphi^{2m-1}$$

Die Coefficienten α, β, γ u. s. w. könnte man durch die Entwicklung jener Potenzen bestimmen: leichter ist folgendes Verfahren: es ist nemlich $\Sigma \pm \frac{\text{f.}\, n\varphi}{n^{2m-1}}$ $= \Sigma \frac{\text{f.}\, n\varphi}{n^{2m-1}} - \frac{1}{2^{2m-2}} . \Sigma \frac{\text{f.}\, 2n\varphi}{n^{2m-1}}$ (wovon man sich durch eine leichte Betrachtung dieser Reihen überzeugen wird). Verwandelt sich also, statt φ, 2φ, geschrieben, die Reihe S in S^1, so muß $S - \frac{S^1}{2^{2m-2}}$ der Reihe in (1) gleich werden. So erhält man Gleichungen für die Coefficienten. Zuerst übersieht man aus denselben leicht, daß die Coefficienten der geraden Potenzen verschwinden müssen, weil diese auch in der nur erwähnten Reihe fehlen: eine Ausnahme macht der Coefficient der letzten Potenz ohne eins, für diesen ist nemlich

$s\left(1 - \frac{2^{2m-2}}{2^{2m-2}}\right) = 0$, woraus man nicht auf $s = 0$ schließen darf. Es finden sich aber ε und ζ unmittelbar, sogleich aus der Entwickelung der letzten Glieder von $(\pi - \varphi)^{2m-1}$, und zwar $\varepsilon = \pm \frac{\pi}{1.2..2m-2} . \frac{1}{2}$; wo, wie in (1), das obere Zeichen für ein ungerades m gilt, das untere für ein gerades. Die übrigen Coefficienten geben sich folgendergestalt: für α wird $\alpha \left(1 - \frac{1}{2^{2m-3}}\right) = \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-2}}$, also $\alpha = \Sigma \frac{1}{n^{2m-2}}$; eben so $\gamma = \frac{-1}{1.2.3} \Sigma \frac{1}{n^{2m-4}}$; u. s. w. Daraus entsteht folgende Summation;

$$\Sigma \frac{\text{f.}\, n\varphi}{n^{2m-1}} = \varphi \Sigma \frac{1}{n^{2m-2}} - \frac{\varphi^3}{1.2.3} . \Sigma \frac{1}{n^{2m-4}} + \&c... ,$$

$$\pm \frac{\varphi^{2m-2}}{1.2..2m-2} . \pi . \frac{1}{2} \mp \frac{\varphi^{2m-1}}{1.2..2m-1} . \frac{1}{2}$$

wobey das Gesetz des Fortgangs leicht zu übersehen ist: die m ersten Glieder der Reihe, welche f. φ ausdrückt, sind nemlich in $\Sigma \frac{1}{n^{2m-2}}$; $\Sigma \frac{1}{n^{2m-4}}$; $\Sigma \frac{1}{n^{2m-6}} \ldots \Sigma \frac{1}{n^2}$; $\frac{1}{2}$; multiplicirt: wozu noch, nach der schon bemerkten und erklärten Ausnahme, das letzte Glied ohne eins kommt; daher auch das letzte Glied ein anderes Zeichen hat, als ihm vermöge der nur erwähnten Reihe zukäme.

4) Man setze hier wie in (2) $\varphi = \pi$; dividire überall durch π^{2m-1}, mache aus den zwey letzten Glie-

dern eines, und schreibe dann, vor m, $m+1$, so entsteht folgende Gleichung:

$$0 = \pi^{-2m} \Sigma \frac{1}{n^{2m}} - \frac{\pi^{-2m+2}}{1.2.3} \Sigma \frac{1}{n^{2m-2}} + \&c. \ldots$$
$$\mp \frac{\pi^{-2}}{1 \ldots 2m-1} . \Sigma \frac{1}{n^2} \pm \frac{m}{1 \ldots 2m+1}$$

Diese Gleichung drückt das allgemeine Gesetz aus, nach welchem die Summen der Reihen gerader Potenzen natürlicher Zahlen, mit einerley Zeichen, fortschreiten *). Daraus ist auch der Zusammenhang dieser Summen mit den bekannten Bernoullischen Zahlen ersichtlich: Wenn nemlich $\mathfrak{A}^{M}$ unter diesen Zahlen der Ordnung nach die m^{te} bedeutet, so folgt, aus derselben Gesetze, verbunden mit der nur erwiesenen Gleichung,

$$\Sigma \frac{1}{n^{2m}} = \frac{2^{2m-1}}{1.2.3 \ldots 2m} . \mathfrak{A}^{M} \pi^{2m} \text{ **)}.$$

Daraus wird auch für die Reihen in (2):

$$\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m}} \doteq \frac{2^{2m-1}-1}{1 \ldots 2m} . \mathfrak{A}^{M} \pi^{2m}.$$

Zugleich ergiebt sich als die Hälfte der Summe dieser beiden Ausdrückungen: $\Sigma \frac{1}{(2n-1)^{2m}}$ (von $n = 1$ bis $n = \text{inf.}$) $= \frac{2^{2m}-1}{1 \ldots 2m} . \frac{\mathfrak{A}^{M} . \pi^{2m}}{2}$

*) Vergl. *Euleri* Opusc analyt. Tom. II. l. c.

**) Aus dem Gesetze, nach welchem die Bernoullischen Zahlen, unmittelbar, am bequemsten berechnet werden (Instit. Calc. Differ. P. II. cap. V. p. 418), ist diese Folge nicht wohl zu übersehen: wenn man aber zurückgeht, und die Gleichungen (p. 414) für die Zahlen β, δ, ζ u. s. w., aus welchen die

5) Die Untersuchungen in (1) (3) betreffen die Reihen von Sinussen: da das Verfahren für die Cosinusse mit dem seither beobachteten völlig übereinkommt, so wäre eine ausführliche Entwickelung hier überflüssige Wiederholung. Ich setze also nur die Resultate her, welche die allgemeinen Ausdrücke enthalten. Es ist nemlich

$$\Sigma \pm \frac{\cos. n\varphi}{n^{2m}} = \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m}} - \frac{\varphi^2}{1.2}\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-2}}$$

$$+ \frac{\varphi^4}{1.2.3.4}\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-4}} - \ldots\ldots \pm \frac{\varphi^{2m-2}}{1\ldots 2m-2}\Sigma \pm \frac{1}{n^2}$$

$$\mp \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi^{2m}}{1\ldots 2m}$$

wobey das Gesetz des Fortgangs leicht in die Augen fällt: das allgemeine Glied des Ausdrucks ist

$\pm \frac{\varphi^{2r}}{1\ldots 2r} \cdot \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-2r}}$. — Eben so findet sich

für die Reihe mit gleichen bejahten Zeichen:

$$\Sigma \frac{\cos. n\varphi}{n^{2m}} = \Sigma \frac{1}{n^{2m}} - \frac{\varphi^2}{1.2}\Sigma \frac{1}{n^{2m-2}}$$

$$+ \frac{\varphi^4}{1..4}\Sigma \frac{1}{n^{2m-4}} - \ldots\ldots$$

$$\mp \frac{\varphi^{2m-1}}{1\ldots 2m-1} \cdot \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi^{2m}}{1\ldots 2m}$$

Die allgemeine Form der Glieder dieses Ausdrucks ist

Bernoullischen gebildet werden, betrachtet: so wird man sich leicht davon überzeugen. Diese Anmerkung schien mir nothwendig, da Euler jene Folge ohne einige Erläuterung annimmt.

$\pm \frac{\varphi^{2r}}{1 \ldots 2r} \cdot \Sigma \frac{1}{n^{2m-2r}}$; die zween letzten sind für sich klar, und die Ausnahme bey dem letzten, ohne eins, ist, wie in (3), zu erklären. Wegen der Zeichen gilt auch hier, die in (3) gemachte Erinnerung.

IV. Anmerkungen über den Fall: $\varphi = 0$.

1) Wenn man in der (III. 1.) erwiesenen Summation:

$$\text{f.}\,\varphi + \frac{\text{f.}\,2\,\varphi}{2} + \frac{\text{f.}\,3\,\varphi}{3} + \ldots \text{ in inf.} = \frac{\pi - \varphi}{2}$$

$\varphi = 0$ setzt, so verschwinden f. φ, f. $2\,\varphi$, f. $3\,\varphi$ u. s. w. Und doch soll die Summe der Reihe $= \frac{\pi}{2}$ werden. Dieses Paradoxon erklären Bernoulli und Euler (wenn ich ihre Sprache in meine Zeichen übersetze) folgendergestalt: für ein unendlich kleines φ werde f. $\varphi = \varphi$; f. $2\,\varphi = 2\,\varphi$ u. s. w: also $\Sigma \frac{\text{f.}\,n\,\varphi}{n} = \Sigma\,\varphi = n\,\varphi$; es sey aber bekannt, daß eine unendlich kleine Größe unendlichmal wiederholt, oder in einen unendlich großen Factor (dergleichen hier n andeutet) multipkicirt, etwas endliches geben könne; und so enthalte die Folge aus jener Summation: $\frac{\pi}{2} = n\,\varphi$, keine Ungereimtheit. Dabey läßt sich noch folgendes anmerken:

2) Für jeden Bogen x ist f. $x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \ldots 5}$ — &c. für einen unendlich kleinen Werth von x

verschwinden die höhern Potenzen, gegen die erste: welches in einem, der Sache selbst angemessenern Ausdrucke, so viel heißt: die Grenze des Verhältnisses $\frac{l.\,x}{x}$ sey $= 1$. So richtig das im allgemeinen ist, so glaube ich doch, daß im gegenwärtigen Falle nicht verstattet sey, die höhern Potenzen wegzulassen. Man behalte sie vorerst bey, so wird $\Sigma \frac{1}{n} l.\, n\,\varphi =$

$$\varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1..5} - \&c.$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(2\,\varphi - \frac{2^3\,\varphi^3}{1.2.3} + \frac{2^5\,\varphi^5}{1..5} - \&c.\right)$$

$$+ \tfrac{1}{3}\left(3\,\varphi - \frac{3^3\,\varphi^3}{1.2.3} + \&c.\right)$$

Ordnet man nach den Potenzen von φ, so werden die Coefficienten-Reihen, welche zu φ; $-\frac{\varphi^3}{1.2.3}$; u. s. w. gehören, $= \Sigma\, n^0$; $\Sigma\, n^2$; $\Sigma\, n^4$; u. s. w. Nun ist (für ein unendlichgroßes n, wie hier angenommen wird,) $\Sigma\, n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1}$. Also erhält man: $\Sigma \frac{1}{n} l.\, n\,\varphi$ $= n\,\varphi - \frac{1}{3}\,\frac{n^3\,\varphi^3}{1.2.3} + \frac{1}{5}\,\frac{n^5\,\varphi^5}{1...5} - \&c.$ Für ein unendlichkleines φ kann $n\,\varphi$ endlich werden, wie auch **Euler** annimmt; aber zugleich werden dann auch $n^3\,\varphi^3$, $n^5\,\varphi^5$ u. s. w. endliche Größen, und es ist demnach nicht

erlaubt, $\Sigma \frac{1}{n}$ l. $n\phi$ geradezu $= n\phi$ zu setzen. —— Dieses Beyspiel dient unter andern auch, zu zeigen, wie vorsichtig man bey dem Gebrauche des Unendlichen im Calcul verfahren müsse. Die Sache im allgemeinen betrachtet, scheint freylich die Evidenz der höhern Analysis dadurch zu gewinnen, wenn jener Begrif ganz daraus verbannt würde. Vielleicht ließen sich, auch bey dieser Veränderung, die Anfangsgründe der Wissenschaft noch bequem vortragen: es giebt aber schwehrere analytische Untersuchungen, bey welchen die Vermeidung des Begrifs, und der seither üblichen Bezeichnungsart desselben, nicht nur einen viel weitläufigern, mit ungleich größerer Mühe zu übersehenden Vortrag, sondern ganz andere Verfahrungsarten und Wendungen der Beweise erfordern würde.

3) Aehnliche Betrachtungen wie in (2) kann man auch bey Reihen mit höhern Exponenten anstellen. **Euler** sagt: $\Sigma \frac{\text{l. } n\phi}{n^2}$ verschwinde offenbar für $\phi = 0$: denn wenn man vor ϕ die unendlich kleine Größe ω setze, so werde jene Reihe $= \frac{\omega}{1^2} + \frac{\omega}{2^2} + \frac{\omega}{3^2} +$ &c. $= \omega \frac{\pi^2}{6} = 0$. Dieses gründet sich wiederum darauf, daß die höhern Potenzen von ϕ weggelassen sind. Was nur dargethan worden, muß wenigstens darin behutsam machen. Man behalte also alle Potenzen bey, so wird

$\Sigma \frac{\text{l. } n\phi}{n^3} =$

$$\varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1..5}$$

$$+\frac{1}{2^3}\left(2\varphi - \frac{2^3\,\varphi^3}{1.2.3} + \&c.\right)$$

$$+ \&c.$$

$$= \varphi\,\Sigma\,\frac{1}{n^2} - \frac{\varphi^3}{1.2.3}.\Sigma n^0 + \frac{\varphi^5}{1..5}.\Sigma n^2 - \&c.$$

Nun ist zwar offenbar die erste Reihe endlich, also mit φ multiplicirt gibt sie o; aber die folgenden Reihen, welche **Euler** gar nicht in Rechnung genommen hat, sind für sich unendlich groß, und sie könnten also wohl, mit unendlich kleinen Größen multiplicirt, etwas endliches geben. Wenigstens läßt sich das Gegentheil nicht ohne einige Rechtfertigung oder Erläuterung annehmen. — Eben diese Erinnerungen gelten auch gegen die **Art zu schließen**, welche bey den fernern Summationen gebraucht wird.

V. Fortsetzung.

1) Unter den Reihen von Cosinussen ist folgende Summation die einfachste: Σ cos. $n\varphi = -\frac{1}{2}$. Setzt man nun $\varphi = o$; so folgt daraus die Ungereimtheit: $1 + 1 + 1 + 1$ &c. in inf. $= \frac{1}{2}$. **Dan. Bernoulli** erklärt dieses **Paradoxon** so: die erwähnte Summation sey für jeden Bogen φ wahr, auch wenn er noch so klein sey, so lange nur nicht φ ein absolutes Nichts sey. Er sagt zuletzt *): „Ergo in arcu φ non excluduntur arculi;

*) Tom. XVI. Comm. Acad. Petrop. p. 84.

arculi; excluduntur saltem puncta vera mathematica, *quorum existantiam & positionem Analysis abstracta indicare nequit.*„ Ich muß gestehen, daß mich diese Erklärung nicht völlig befriedigt: sonst geben doch die Reihen für den Sinus, Cosinus, die Tangenten u. s. w. auch die die wahren Werthe für verschwindende Bogen; auch gebraucht B. selbst den Fall $\varphi = o$, zur Bestimmung des Werths der Constanten. Jener Ausspruch scheint also der Analysis eine Unvollkommenheit zur Last zu legen, von welcher sie, wenigstens sonst, frey ist.

3) Ließe sich deutlich zeigen, daß in der Rechnung selbst Gründe liegen, warum sie gerade bey dem gegenwärtigen Falle anders geführt werden muß, als sonst: so wäre jenes Paradoxon mit der Analysis in Uebereinstimmung gebracht, und man hätte nicht nöthig zu sagen: die Analysis sey auf diesen Fall gar nicht anwendbar. — Vielleicht leistet diesen Vortheil nachfolgende Erklärung: Ich lege dabey die allgemeinste Methode, Reihen von Cosinussen und Sinussen zu summiren, welche auch **Euler** in andern Fällen gebraucht hat, zum Grunde. Man setzt $\text{cos.}\, n\varphi = \frac{p^n + q^n}{2}$, wo $p = \text{cos.}\,\varphi + \sqrt{-1}\,.\,\text{s.}\,\varphi$, $q = \text{cos.}\,\varphi - \sqrt{-1}\,.\,\text{s.}\,\varphi$. So wird also $\Sigma\, \text{cos.}\, n\,\varphi = \frac{1}{2}\Sigma p^n + \frac{1}{2}\Sigma q^n = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q}\right)$. Für $\varphi = o$ ist $p = 1$, und $q = 1$; also gibt wirklich die Rechnung: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{0} + \frac{1}{0}\right)$, oder einen unendlich großen Werth der Summe. Um nun zu erweisen, daß die Art, wie die Rechnung im allgemeinen richtig geführt wird, und das Resultat $-\frac{1}{2}$ gibt, bey $\varphi = o$ nicht ange-

bracht werden darf, dienet zuerst die Bemerkung, daß $q = p^{-1}$ ist. So wird $\Sigma \cos. n\phi = \frac{1}{2}(\Sigma p^n + \Sigma p^{-n})$.

Für ein willkürliches p, ist $\Sigma p^n = \frac{p}{1-p}$; Σp^{-n} $= \frac{1}{p-1} = -\frac{1}{1-p}$: also $\Sigma \cos. n\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right)$ $= -\frac{1}{2}$. Bey dieser Reduction liegt die Annahme: $\frac{1}{p-1} = -\frac{1}{1-p}$ zum Grunde: für $p = 1$ ist $1 - p$ $= p - 1$. (Diese Gleichung hat offenbar zur Wurzel: $p = 1$.) Also wird $\Sigma p^{-n} = + \frac{1}{1-p}$, und $\Sigma \cos. n\phi$ $= \frac{1}{2}\left(\frac{p+1}{1-p}\right) = \infty$. Jene Annahme setzt voraus, daß $1 - p$ und $p - 1$ verschieden seyen, welches für $p = 1$ nicht statt findet: auch würde sonst die Ungereimtheit daraus folgen: $\frac{1}{0} = -\frac{1}{0}$, oder $\frac{2}{0} = 0$.

4) Vielleicht könnten bey dieser Vorstellungsart noch Zweifel übrig bleiben: sie verschwinden aber völlig, wenn man die ersten Gründe jener Summationen zu Hülfe nimmt, wobey man auf die **Ergänzungen** achten muß *). So ist für eine jede endliche Zahl von Gliedern, $S. x^n$ **) $= \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$; $S. x^{-n} = \frac{x^{-1} - x^{-n-1}}{1 - x^{-1}}$;

*) Kästners Analysis endlicher Größen, §. 15.

**) Vergl. §. II. not. g. Um den Unterschied bemerkbar zu machen, bezeichne ich durch S. die Summe einer endlichen Reihe, vom ersten bis zu einem jedweden n^{ten} Gliede. Da Σ immer die Summe einer unendlichen Reihe andeutet: so scheint mir alle Zweideutigkeit gehoben zu seyn.

daraus entsteht die Summe der beiden endlichen Reihen $= \frac{x - x^{n+1} + x^{-n} - 1.}{1 - x}$. Für $x = 1$ verschwinden Zähler und Nenner: man setze also $x = 1 + \omega$, und behalte nur die ersten Potenzen von ω bey, so fällt diese verschwindende Grösse durch Division ganz weg: und man findet jene Summe $= 2n$; also unendlich groß für unendliche Reihen, wie sich gehört.

5) Es finden sich in der Analysis, zumal in der Lehre von den Reihen, nicht selten Schwürigkeiten, welche auf eine ähnliche Weise können gehoben werden. Von allen wag' ich es nicht zu behaupten; aber bey vielen scheint mir die Entstehungsart, welche zugleich die Methode ihrer Auflösung angiebt, diese zu seyn. Man erweist einen allgemeinen Satz, aus Gründen, welche ihm einen gewissen Sinn, oder eine besondere Einschränkung geben. Durch eine Reihe von Schlüssen, deren Anfang oft am Ende schwer zu übersehen ist, geräth man endlich auf eine ungereimte Folgerung. Man hat nemlich fortgerechnet, ohne bey der Verbindung der Zeichen an die Begriffe zu denken, welche bey allen Anwendungen jenes ersten Satzes zum Grunde liegen müssen. — So geht es, wenn mir eine Vergleichung zwischen sonst heterogenen Dingen erlaubt ist, bey schiefen Anwendungen mancher Gesetze, bey welchen man die erste Veranlassung, und damit den, nicht selten daraus abzuziehenden, Geist derselben übersieht oder vergessen hat. Darin kommt die Analysis überhaupt mit allen Verrichtungen überein, welche man, mehr oder weniger, auf einen gewissen Mechanismus gebracht hat: wobey immer Fälle vorkommen werden, da der Buchstabe von dem Geiste unterschieden

werden muß. In der Mathematik sind dieser Fälle vielleicht am wenigsten: weil der Mechanismus selbst hier von höherer Art ist, und die künstliche Maschine des Calculs nie etwas beträchtliches wirken kann, wenn sie nicht mit Geisteskraft gelenkt wird.

VI. Summirung der Reihen in (III.), mit Potenzen von Cosinussen und Sinussen.

1) Einfachere Summationen, als die in (III.), hat man dadurch allgemeiner zu machen gesucht, daß man statt der Sinusse und Cosinusse, auch höhere Potenzen derselben in Betrachtung gezogen hat. Es läßt sich nemlich jedwede r^{te} Potenz von cos. φ in nachstehenden Ausdruck auflösen *):

$$2^r . \cos. \varphi^r = \cos. r\varphi + r \cos. (r-2)\varphi + r\frac{(r-1)}{1.2}\cos. (r-4)\varphi + r\frac{(r-1)}{1.2.3}(r-2)\cos.(r-6)\varphi + \&c. \ldots .$$

Setzt man vor φ, $\frac{\pi}{2} - \varphi$; so wird aus cos. φ, s. φ;

*) *Euler*. Subsidium Calculi sinuum; Comment. Petrop. nov. T. V. In diesem Ausdrucke, welcher mit dem $r+1^{ten}$ Gliede abbricht, kommt man, nach der Mitte, auf Cosinusse negativer Bögen, welche mit den Cosinussen der gleichen bejahten Bögen einerley sind. Diese Betrachtung bietet eine Abkürzung dar, welche zur wirklichen Entwickelung der Potenzen bequemer, aber in gegenwärtiger Untersuchung weniger dienlich ist.

und man erhält einen ähnlichen Ausdruck für Potenzen von Sinussen, entweder durch Cosinusse oder durch Sinusse, jenachdem r gerade oder ungerade ist. Daraus übersieht man im allgemeinen, wie, durch Auflösung höherer Potenzen in einfache, Reihen, in welchen jene vorkommen, auf den Fall $r = 1$ gebracht werden können. Auf die reciproke Reihen, deren Summen in (III.) angegeben sind, ist, so viel ich weiß, dieses Verfahren noch nicht angewandt worden. Die Reduction setzt hier noch andere Summationen voraus, und leitet, ohngeachtet der anscheinenden, zum Theil auch wirklichen, Verwicklung, doch zu einigen Sätzen, welche wegen ihrer Einfachheit und Allgemeinheit, eine Erwähnung verdienen.

2) Was zuerst Reihen mit Potenzen von Sinussen, und zwar mit abwechselnden Zeichen, betrift: so erhellt aus der in (1) gemachten Bemerkung, daß $\Sigma \pm \frac{\text{f. } n\phi^r}{n^m}$ dann immer, aber auch nur alsdann, angegeben werden könne, wenn r und m zugleich entweder gerade oder ungerade Zahlen sind. Für beide Fälle lassen sich folgende zween Sätze erweitern: 1) $\Sigma \pm \frac{\text{f. } n\phi^r}{n^m}$ seye $= 0$, so lange $m < r$; *) 2) für $m = r$, werde $\Sigma \pm \frac{\text{f. } n\phi^m}{n^m}$

*) Diese Summation giebt etwas ungereimtes für $\phi = \frac{\pi}{2}$. Die Erklärung beruhet auf den Gründen, aus welchen sie abgeleitet ist, die im folgenden §. weiter entwickelt werden. Die Summationen, welche dabey gebraucht werden, gelten nemlich nur für Bögen, die nicht größer als π sind. Nun kommt in der Entwicklung von f. ϕ^r nach (1) der Bogen $r\phi$ vor, also

$= \pm \frac{1}{2} \phi^m$, wobey das untere Zeichen gilt, wenn im einen Falle, m; im andern, $m + 1$, durch 4 theilbar ist: sonst gilt das obere Zeichen.

3). Für Reihen mit Potenzen von Cosinussen, auch mit abwechselnden Zeichen, ergeben sich folgende Summationen:

$$\Sigma \pm \frac{\text{cos. } n\phi^r}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - r \cdot \frac{\phi^2}{4}$$

$$\Sigma \pm \frac{\text{cos. } n\phi^r}{n^4} = \alpha\pi^4 - r\beta\phi^2 + r(3r-2)\gamma\phi^4$$

wo α, β, γ aus dem Falle $r = 1$ in (III. 5.) bekannt sind. Eben so erhält man Ausdrücke für $\Sigma \pm \frac{\text{cos. } n\phi^r}{n^6}$; $\Sigma \pm \frac{\text{cos. } n\phi^r}{n^8}$ u. s. w. Das Gesetz ihres Fortgangs allgemein zu übersehen, und zu zeigen, wie die, hier, und in (2) behaupteten Sätze gefunden worden sind; dazu dienen nachfolgende Betrachtungen:

4) Wenn man in $\Sigma \pm \frac{\text{cos. } n\phi^r}{n^{2m}}$, die r^{te} Potenz von cos. $n\phi$ durch das in (1) angegebene Verfahren entwickelt, so verwandelt sich jene Reihe in $r + 1$ Partial-Reihen von der Form: $\Sigma \pm \frac{\text{cos. } n\psi}{n^{2m}}$, wo ψ nach

darf ϕ nicht größer als $\frac{\pi}{r}$ genommen werden. — Auf dergleichen Bemerkungen, welche Rechenschaft geben von der Einschränkung gewisser allgemeiner Sätze, ist man, wie es mir vorkommt, in der Lehre von den Reihen nicht immer gehörig aufmerksam gewesen. Wirklich scheint darin noch nicht alles überzeugend und deutlich genug auseinandergesetzt zu seyn.

einander folgende Werthe erhält: $r\varphi$; $(r-2)\varphi$; $(r-4)\varphi$; u. s. w. Diese Partial-Reihen sind noch, nach der Ordnung, in folgende Größen multiplicirt: 1; $\frac{r}{1}$; $r\frac{(r-1)}{1.2}$; u. s. w. welche bekanntlich die Binomial-Coefficienten der r^{ten} Potenz vorstellen. Nun läßt sich $\Sigma \pm \frac{\cos. n\psi}{n^{2m}}$, nach (III. 5.), durch gerade Potenzen des Bogens ψ, von der 0ten an bis zur $2m^{ten}$ ausdrücken. Nimmt man also die Summen der erwähnten Reihen, auf diese Weise dargestellt, zusammen: und ordnet solche nach den Potenzen von φ, so wird der Coefficient einer jedweden $2p^{ten}$ Potenz

$$=\pm\alpha\left(r^{2p}+r(r-2)^{2p}+r\frac{(r-1)}{1.2}(r-4)^{2p}+\&c.\right);$$

wo α aus (III. 5.) bekannt ist. Es kommt demnach nur darauf an, die Summe der endlichen Reihen zu bestimmen, welche in $\pm\alpha$ multiplicirt ist.

VII. Fortsetzung, nebst vorläufiger Untersuchung einer andern Reihe.

1) Diese Reihe, deren Summirung bey der im vorhergehenden §. angefangenen Untersuchung eine Zwischenfrage ausmacht, ist, als ein besonderer Fall, unter folgender allgemeineren Reihe begriffen:

$$r^q y^r + r(r-2)^q y^{r-2} + r\frac{(r-1)}{1.2}(r-4)^q y^{r-4} + \&c. \ldots = Y$$

Da die Summation der letztern Reihe auch bey andern

analytischen Untersuchungen von Nutzen seyn kann, so wird die Entwicklung derselben, bey gegenwärtiger Veranlassung nicht überflüssig seyn. Auch kenne ich kein einfacheres Verfahren, jene Zwischenfrage aufzulösen, als eben die Summirung der erwähnten allgemeineren Reihe, in welcher man hernach nur $y = 1$ setzen darf.

Für jedes y ist nach dem Binomischen Satze:

$$y^r + r y^{r-2} + r\frac{(r-1)}{1 \cdot 2} y^{r-4} + \ldots + y^{r-2r} = \left(y + \frac{1}{y}\right)^r$$

Wenn man diese Reihe differentiirt, und alsdann durch y multiplicirt, so entsteht daraus folgende Reihe:

$$r y^r + \frac{r}{1} \cdot (r-2) y^{r-2} + \ldots + (r-2r) \cdot y^{r-2r}$$

deren Summe also $= r\left(y + \frac{1}{y}\right)^{r-1}\left(y - \frac{1}{y}\right)$

ist. Dieses Verfahren kann man fortsetzen; und so erhellt, um die Sache sogleich allgemein vorzutragen, daß eine q-fache Wiederholung der Differentiation, und immer darauf folgenden Multiplication, durch y, die Summe der anfangs erwähnten Reihe $= Y$, für jedes q bestimme.

2) Die Rechnungen, welche in dieser Absicht geführt werden müssen, vollständig zu entwickeln, wäre hier zu weitläufig. Es wird hinlänglich seyn, das Resultat so darzustellen, daß man daraus das allgemeine Gesetz am bequemsten übersehen kann. Man nenne, der Kürze wegen, $\dfrac{y - \frac{1}{y}}{y + \frac{1}{y}} = z$; so wird Y immer für jedes q, einem

Ausdrucke gleich seyn, dessen Glieder zum gemeinschaftlichen Factor $\left(y+\frac{1}{y}\right)^r$ haben, und sonst nach Potenzen von z mit folgenden Exponenten fortgehen: q; $q-2$; $q-4$; u. s. w.; für ein ungerades q ist also der Exponent von z im letzten Gliede $= 1$, für ein gerades q kommt in diesem Gliede z gar nicht vor (weil $z^0 = 1$). So wird für jedes q; $Y\left(y+\frac{1}{y}\right)^{-r}$ folgende Gestalt haben: $A z^q + B z^{q-2} + C z^{q-4} + \ldots\ldots$ wobey es nur darauf ankommt, die Coefficienten A, B, C u. s. w. gehörig zu bestimmen.

3) Zu dieser Absicht scheint mir folgende Bezeichnungsart am dienlichsten zu seyn. Die Coefficienten des ersten, zweyten, dritten Glieds u. s. w. für jedes q, benenne ich mit den Römischen Zahlzeichen I, II, III, u. s. w. nach der Ordnung; jedes dieser Zahlzeichen wird oben mit einem Index *) versehen, der dem Exponenten der Potenz

*) Es kommen in der Analysis nicht selten Fälle vor, wo es bequem ist, eine Reihe verschiedener Größen, die eine gewisse gemeinschaftliche Beziehung haben, auf einerley Weise zu bezeichnen, z. B. durch einen Buchstaben des Alphabeths. Den Unterschied drückt man alsdann durch den an die Spize geschriebenen Index aus, welcher die Ordnung einer jeden Größe in der Reihe der gleichnamichten anzeigt. Damit dieser Index nicht mit einem Exponenten verwirrt werde, beobachte ich sonst, (z. B. in III. 8.) die Vorschrift, denselben mit Römischen Zahlen oder großen Buchstaben zu bezeichnen, da Exponenten gewöhnlich mit arabischen Zahlzeichen und kleinen Buchstaben ausgedruckt werden. Hier bin ich davon abgewichen, weil ich die Zahlen und Buchstaben der ersten Art zu anderer Absicht gebrauchen mußte: deswegen habe ich die von der andern Art gewählt, und solche mit: | | eingeschlossen, um die Verschiedenheit von Exponenten bemerkbar zu machen.

von z entspricht, und andeutet, das wievielte dasselbe in der Reihe der gleichnamichten Zahlzeichen seye. Bey ungeraden q ist also der letzte Coefficient $= Q|1|$; (welcher Buchstabe die q^{te} Römische Zahl ausdrückt,) bey dem nächstfolgenden geraden $q + 1$ sollte er, der Vorschrift gemäß, $= (Q + I)|0|$ seyn: statt dessen wird $Q|1|$ geschrieben. Begreiflich kann der Index nie $= 0$ werden, und wenn er es zu werden scheint, so nimmt man das nächst vorhergehende Zahlzeichen mit dem Index $= 1$. So stimmt jene Ausnahme mit der Bezeichnungsart überein. — Demnach kommen in dem Ausdrucke (2) von $Y\left(y + \frac{1}{y}\right)^{-r}$, für $q = 2\,l - 1$ und $= 2\,l$, l Römische Zahlzeichen nach der Ordnung vor; ihre Indices sind im ersten Falle: $2\,l - 1$; $2\,l - 3$; ....3; 1; im andern: $2\,l$; $2\,l - 2$; ....4; 2; 1; wobey die nur erwähnte anscheinende Irregularität bey dem letzten Index wohl zu bemerken ist. Auf diese Weise verwandelt sich die allgemeine Form des Ausdrucks (2) in folgende:

$$I|q|.z^q + II|q-2|.z^{q-2} + III|q-4|.z^{q-4} + \ldots\ldots$$

4) Dieses vorausgeschickt, wird das Verhältniß zwischen denen auf die erwähnte Art bezeichneten Größen, durch folgende Gleichung ausgedrückt;

$$M|n| = (n+1).(M-I)|n+1| + (r-n+1).M|n-1|$$

wo $M|n|$; $M|n-1|$, unter den Größen, welche mit dem m^{ten} Römischen Zahlzeichen bemerkt sind, der Ordnung nach, die n^{te} und $n - 1^{te}$ bedeuten; $(M-I)|n+1|$ die $n + 1^{te}$ unter denen, welche durch das nächstvorher-

gehende Zahlzeichen angedeutet werden: *) n und m kann man hier willkürlich annehmen. Für $m = 1$, wird, da es kein $M-I$ gibt, $I|n| = (r-n+1)\,I|n-1|$. Für $n = 1$, ist nach der in (3) gemachten Bemerkung $M|0| = (M-I)|1|$, also $M^1 = 2\,(M-I)|2| + r.(M-I)|1|$. Aus diesen Gleichungen lassen sich allgemeine Ausdrücke ableiten. Man setze, der Kürze und leichtern Uebersicht wegen, $(n+1)(r-n) = \varphi n$; bekanntlich druckt man auch sonst durch φn eine jedwede Funktion von n aus, also erhellet, was im gegenwärtigen Falle $\varphi(n+1)$, $\varphi(n+2)$ u. s. w. bedeuten. Ferner stelle immer das Zeichen S das summatorische Glied des ganzen nach demselbigen geschriebenen Ausdrucks vor, oder die Summe aller Werthe dieses Ausdrucks, von einem gewissen, sogleich näher zu bestimmenden, n an gerechnet. Dieses vorausgesetzt, ergeben sich folgende Bestimmungen:

$$\frac{I|n|}{r(r-1)\ldots(r-n+1)} = 1$$

$$\frac{II|n|}{r(r-1)\ldots(r-n+1)} = S\varphi n$$

$$\frac{III|n|}{r(r-1)\ldots(r-n+1)} = S\varphi n . S\varphi(n+1)$$

$$\frac{IV|n|}{r(r-1)\ldots(r-n+1)} = S\varphi n . S\varphi(n+1) . S\varphi(n+2)$$

*) Man kann sich die mit einem Zahlzeichen ausgedrückte Grössen in Vertikalreihen vorstellen: die mit I in der ersten, mit II, III, u. s. w. in der zweyten, dritten u. s. w. So finden sich immer gleiche Indices in einer horizontalen Reihe. Dem-

Wie diese Ausdrücke fortgehen werden, ist leicht zu übersehen. Es wird nemlich allgemein:

$$\frac{M|n|}{r(r-1)..(r-n+1)} = S\,\varphi n S\,\varphi(n+1)...\,S\,\varphi(n+m-2)$$

Wegen dem Anfangswerthe von n, von welchem jede Summe besonders gerechnet wird, ist dieses zu merken: wenn nach einem S, zunächst $\varphi\,(n+\delta)$ kommt, so wird die durch dieses S bezeichnete Summe von $n = -\delta$ an genommen *).

Jene Ausdrücke zeigen unmittelbar, daß kein Zahlzeichen einen größern Index als r erhalten kann. Wird also in der allgemeinen Form (3), $q = r + 1$, so fällt das erste Glied, welches sonst immer I mit einem gewissen Index enthält, weg: eben so fehlen in jenem Ausdrucke für $q = r + 3$, noch das zweyte; für $q = r + 5$, das dritte Glied u. s. w. Die übrig bleibenden Glieder folgen den angegebenen allgemeinen Regeln. — Noch erhellt aus dem Ausdrucke für $M|n|$, daß die allgemeine Bestimmung dieser Größe von der Summation der Potenzen der natürlichen Zahlen abhange.

5) Wenn man die seitherigen allgemeinen Betrachtungen auf den Fall $y =$ anwendet, wie (1) erfordert, so wird in (3) $z = 0$; also ergeben sich folgende zween Sätze: die Summe der Reihe:

nach wird $M|n|$ das n^{te} Glied in der m^{ten} Vertikalreihe, oder es findet sich in dieser ihrem Durchschnitte mit der n^{ten} Horizontalreihe.

*) Wenn N eine beliebige Function von n ist, und man sucht ihr summatorisches Glied von $n = -d$ an gerechnet, so darf man nur in N, $n = p - d - 1$ setzen, woraus P entspringe. Nun nimmt man SP von $p = 1$, bis zu $p = n + d + 1$, so ist, was herauskommt, $=$ S N in dem erwähnten Sinne.

$$r^q + r(r-2)^q + r\frac{(r-1)}{1.2}(r-4)^q + \ldots$$

ist $= 0$, für ungerade q; für gerade q ist eben diese Summe $= Q^I$: welche Größe gefunden wird, wenn man in dem allgemeinen Ausdrucke (4) $n = 1$, und $m = q$ setzt. Unmittelbare Folgen dieses Satzes sind die in (VI. 3.) behaupteten Summationen. Zugleich ist daraus das allgemeine Gesetz ihres weitern Fortgangs ersichtlich.

6) Alles was von (1) bis (4) ist gesagt worden, gilt auch, wenn in der seither untersuchten Reihe die Zeichen abwechseln: nur muß vor $+\frac{1}{y}$, $-\frac{1}{y}$ geschrieben werden. Ist also jetzt $z = \frac{y+\frac{1}{y}}{y-\frac{1}{y}}$, und drückt Y die Summe nachfolgender Reihe aus:

$$r^q y^r - r.(r-2)^q.y^{r-2} + r\frac{(r-1)}{1.2}(r-4)^q y^{r-4} - \&c...$$

so wird, wie in (3), $Y\left(y-\frac{1}{y}\right)^{-r} =$

$$I|q|.z^q + II|q-2|.z^{q-2} + III|q-4|.z^{q-4} + \&c...$$

Die Coefficienten sind mit denen im vorhergehenden bestimmten einerley. In der Anwendung auf den Fall $y = 1$, fließen aus diesem allgemeinen Ausdrucke folgende Sätze: Für jedes q, was kleiner als r ist, wird, ohne Einschränkung, $Y = 0$. Ist $q = r$, so wird die Summe: $= 2^r . I|r| = 2^r . 1 . 2 . 3 \ldots r$ (nach 4). Ist q

grösser als r, so müssen zween Fälle unterschieden werden: wenn der Unterschied $q-r$ einer geraden Zahl gleicht, so verschwindet die Summe Y, wie für $q < r$: ist aber $q-r$ eine gerade Zahl $= 2l-2$, so wird $Y = 2^r . L^{|r|}$, wo $L^{|r|}$ aus (4) bestimmt werden kann.

7) Um die Anwendung dieser Sätze auf die in (VI. 3.) angeführte Summationen deutlicher zu machen, wird es dienlich seyn, die r^{te} Potenz von $\text{f.}\,\varphi$ hier entwickelt darzustellen. Wenn nemlich in dem (VI. 1.) angegebenen Ausdrucke, für φ, $\frac{\pi}{2} - \varphi$ geschrieben wird, so fließen daraus nachstehende Folgerungen:

$$\pm 2^r \,\text{f.}\,\varphi^r = \text{f.}\,r\varphi - \frac{r}{1} . \,\text{f.}\,(r-2)\,\varphi$$
$$+ r\frac{(r-1)}{1 . 2}\,\text{f.}\,(r-4)\,\varphi - \&c.$$

$$\pm 2^r \,\text{f.}\,\varphi^r = \text{cof.}\,r\varphi - \frac{r}{1} . \,\text{cof.}\,(r-2)\,\varphi$$
$$+ r\frac{(r-1)}{1 . 2}\,\text{cof.}\,(r-4)\,\varphi - \&c.$$

Der erste Ausdruck gilt für ein ungerades, der andere für ein gerades r: das obere Zeichen gilt, wenn in diesem Falle r, in jenem $r-1$ durch 4 theilbar ist: sonst gilt das untere Zeichen. Nun lassen sich bey diesen Ausdrükkungen ähnliche Schlüsse anbringen, dergleichen in (VI. 4.) sind geführt worden: und so fließen die erwähnten Summationen, als unmittelbare Folgen, aus den Sätzen in

(6). Zugleich erhellt wie $\Sigma \pm \frac{\text{sin.}\, n\,\phi^r}{n^m}$ gefunden werden könne, wenn m größer als r ist.

VIII. Untersuchung der Reihe, welche Potenzen von Cosinussen und Sinussen vielfacher Bögen ausmachen.

1.) Die Bemerkung, daß Sinusse und Cosinusse vielfacher, oder überhaupt arithmetisch fortschreitender Bögen, sich in einer recurrirenden Reihe der zwoten Ordnung befinden, ist bey der Erfindung ihrer Summen von einigen Schriftstellern benutzt worden. Ob etwa höhere Potenzen jener Größen ähnliche Reihen bilden, hat man, soviel ich weis, nicht untersucht: sondern bey Summationen von der Art, zu welcher die in (VI.) und (VII.) entwickelte gehören, ohne eine solche Rücksicht, das dort erklärte Verfahren gebraucht. Es wird wenigstens zur Erläute-

*) Die seitherige Ausführung gilt unmittelbar nur von Reihen, in welchen die Zeichen abwechseln. Warum das gegenwärtige Verfahren nicht ohne Einschränkung auch auf Reihen mit gleichen Zeichen angewandt werden könne, davon ligt der Grund darin: in den Ausdrückungen für Potenzen von Cosinussen und Sinussen, wie sie hier gebraucht worden sind, kommt man auf negative Bögen. Nun gelten die in (III. 3. und 5.) erwiesene Summationen: $\Sigma \frac{\text{s.}\, n\,\phi}{n^{2m-1}}$ und $\Sigma \frac{\text{cos.}\, n\,\phi}{n^{2m}}$ nicht für negative ϕ, weil das letzte Glied, ohne eins, dort eine gerade, hier eine ungerade Potenz von ϕ enthält: worin dasselbe von allen übrigen Gliedern eine unterscheidende Ausnahme macht: auf diese lassen sich die seitherigen Betrachtungen unmittelbar anwenden: bey jenem muß die, schon in (VI. 1.) (Anmerk.) erwähnte, Abkürzung zu Hülfe genommen werden.

rung des Zusammenhangs unter diesen Wahrheiten etwas beytragen, jene Bemerkung dahin zu erweitern, daß Potenzen jedweden m^{ten} Grades von Sinussen und Cosinussen vielfacher Bögen, sich in einer recurrirenden Reihe von der Ordnung $m + 1$ befinden.

2) Diese Behauptung ist ein besonderer Fall von nachfolgendem allgemeineren Satze: wenn nemlich

$$a^I + a^{II} x + a^{III} x^2 + a^{IV} x^3 + \ldots\ldots = S$$

eine recurrirende Reihe der 2ten Ordnung ist, so wird die Reihe:

$$A^I + A^{II} x + A^{III} x^2 + A^{IV} x^3 + \ldots = \mathfrak{S}$$

zu den recurrirenden Reihen von der Ordnung $m + 1$ gehören, wenn A^I, A^{II} u. s. w. die m^{te} Potenzen der entsprechenden Coefficienten jener ersten Progression sind. Dieses zu erweisen, sey $x^2 + \alpha x + \beta = 0$, die Gleichung, welche für die Reihe S die scalam relationis bestimme: ihre Wurzeln, sie seyen möglich oder unmöglich, heißen r, ϱ, so wird das allgemeine oder n^{te} Glied in der Reihe der Coefficienten, $= a^N = \mathfrak{A} r^n + \mathfrak{B} \varrho^n$, wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ als Constanten können angesehen werden, weil sie für alle n einen unveränderten Werth haben, welchen zu bestimmen leicht, aber jetzt überflüßig ist. Ueberhaupt hat das allgemeine Glied jeder recurrirenden Reihe (oder vielmehr der Coefficient von x^{n+1}) folgende Gestalt: $\mathfrak{A} r^n + \mathfrak{B} s^n + \mathfrak{C} t^n + \mathfrak{D} u^n +$ &c.: wo r, s, t, u u. s. w. die Wurzeln der Gleichung sind, welche die scalam relationis ausdrückt.

3) Der Ausdruck von a^N, in (2), quadrirt gibt das allgemeine Glied der Reihe $\mathfrak{S}$ für $m = 2$. Dasselbe wird

wird also $= \mathfrak{A}^2 r^{2n} + \mathfrak{B}^2 \varrho^{2n} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}(r\varrho)^n$. Nun ist $r\varrho = \beta$: also stellt diese Größe das allgemeine Glied einer recurrirenden Reihe von der dritten Ordnung dar, zu welcher eine Gleichung mit den Wurzeln r^2, ϱ^2 und β gehört. Diese Gleichung selbst findet man so: z bedeute alle ihre Wurzeln; so ist $(z - x^2)(z - \beta) = 0$. Aus dieser Gleichung, mit der andern: $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ verbunden, und x eliminirt, entsteht:

$$(z - \beta)((z + \beta)^2 - \alpha^2) = 0.$$

4) Auf ähnliche Weise gibt der Ausdruck in (2) auf die dritte Potenz erhoben, oder für $m = 3$:

$$\mathfrak{A}^3 r^{3n} + 3\mathfrak{A}^2\mathfrak{B} r^{2n} \varrho^n + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 \varrho^{2n} r^n + \mathfrak{B}^3 \varrho^{3n}.$$

Weil $r^{2n} \varrho^n = \beta^n r^n$; $\varrho^{2n} r^n = \beta^n \varrho^n$, so entsteht daraus eine recurrirende Reihe der vierten Ordnung: die Wurzeln ihrer Gleichung sind r^3; ϱ^3; βr; $\beta\varrho$; oder x^3; βx. Diese Gleichung, deren unbekannte Größe y heiße, findet sich also durch die Elimination folgender zwoer Gleichungen: $(y - x^3)(y - \beta x) = 0$; $x^2 + \alpha x + \beta = 0$. Sie steiget auf den vierten Grad.

5) Eben so entstehen für die nächsthöhern Potenzen folgende Gleichungen:

für $m = 4$; $(y - x^4)(y - \beta x^2)(y - \beta^2) = 0$
für $m = 5$; $(y - x^5)(y - \beta x^3)(y - \beta^2 x) = 0$
für $m = 6$; $(y - x^6)(y - \beta x^4)(y - \beta^2 x^2)(y - \beta^3) = 0$

Das Gesetz ist hier auffallend, und der Unterschied bey geraden und ungeraden m deutlich. Allgemein erhellet,

daß für jede m^{te} Potenz die Reihe S in (2′) eine recurrirende Reihe von der Ordnung $m + 1$ seyn werde. Die Gleichung für die scalam relationis entspringt für gerade $m = 2l$ aus der Elimination dieser zwoen Gleichungen:

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0;$$

$$(y - x^m)(y - \beta x^{m-2})(y - \beta^2 x^{m-4}) \ldots (y - \beta^l) = 0$$

Für ungerade $m = 2l + 1$ wird statt der letzten Gleichung diese genommen:

$$(y - x^m)(y - \beta x^{m-2})(y - \beta^2 x^{m-4}) \ldots (y - \beta^l . x) = 0.$$

In beyden Fällen wird x weggeschafft.

6) Von der Eigenschaft der Sinusse und Cosinusse vielfacher Bögen, daß sie eine recurrirende Reihe bilden, läßt sich noch folgende Anwendung machen: die Gleichung, welche für diesen Fall die scalam relationis ausdrückt, ist: $x^2 - 2x \cos. \varphi + 1 = 0$; folglich wird $r = \cos. \varphi + \text{s.} \varphi . \sqrt{-1}$; $\varrho = \cos. \varphi - \text{s.} \varphi . \sqrt{-1}$; und das allgemeine Glied

$$= \cos. n\varphi = \mathfrak{A} (\cos. \varphi + \text{s.} \varphi \sqrt{-1})^n + \mathfrak{B} (\cos. \varphi - \text{s.} \varphi . \sqrt{-1})^n$$

Setzt man hier $n = 1$, so erhält man zwo Gleichungen für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, nemlich $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = 1$; $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = 0$; also wird

$$\cos. n\varphi = \frac{(\cos. \varphi + \text{s.} \varphi . \sqrt{-1})^n + (\cos. \varphi - \text{s.} \varphi . \sqrt{-1})^n}{2}.$$

Eben so findet man

$$\text{s.} n\varphi = \frac{(\cos. \varphi + \text{s.} \varphi . \sqrt{-1})^n - (\cos. \varphi - \text{s.} \varphi . \sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}$$

und daraus: $(\cos. \phi \pm \mathrm{f}. \phi \sqrt{-1})^n = \cos. n\phi \pm \sqrt{-1} . \mathrm{f}. n\phi$; bekannte Sätze, welche in den meisten Elementen der Analysis vorkommen, doch ohne immer in gehöriger Allgemeinheit erwiesen zu werden *)

IX. Reihen von bejahten Potenzen **) der natürlichen Zahlen, mit Cosinussen und Sinussen vielfacher Bögen, auch derselben Potenzen.

1) Bey den Reihen, welche den Gegenstand der bisherigen Untersuchung ausmachten, waren die Exponenten von den Potenzen der natürlichen Zahlen verneint: auf solche Reihen, wo die Exponenten bejaht sind, ist die Anwendung gegenwärtiger Methode noch einfacher. Wenn man in folgender unendlichen Progression:

$$\cos. \phi - 2^{2m} \cos. 2\phi + 3^{2m} \cos 3\phi - 4^{2m} \cos. 4\phi + \&c. = \mathfrak{S}. = \Sigma \stackrel{+}{-} n^{2m} \cos. n\phi,$$

die Cosinusse in ihre Reihen auflöst, so wird das allge-

*) *Euleri* Introduct. Cap. VIII. p. 97. Com. Petrop. Nov. T. V. p. 166. An beyden Stellen wird der Beweis für die ersten Fälle geführt, und durch Induction erweitert. Zur völligen Schärfe mußte noch der Schluß von jedem n auf das nächstfolgende $n+1$ gerechtfertiget werden. Diese Ergänzung hier beyzubringen ist überflüßig, da das Verfahren überhaupt bekannt genug ist, durch die häufigen Anwendungen, welche Herr Hofrath Kästner davon gemacht hat, analytische Sätze, welche auf dem Wege der Induction gefunden worden sind, in ihrer Allgemeinheit zu erweisen.

**) Es wird wohl nicht gegen den Sprachgebrauch seyn, bejahte Potenzen diejenige zu nennen, deren Exponent bejaht ist, so wie man unter den zweiten, dritten Potenz u. s. w. diejenigen versteht, bey denen der Exponent $= 2, 3$ u. s. w. ist.

meine Glied $= \pm n^{2m}\left(1 - \frac{n^2\varphi^2}{1.2} + \frac{n^4\varphi^4}{1..4} - \&c.\right)$
und daraus: $S =$

$$\Sigma \pm n^{2m} - \frac{\varphi^2}{1.2}\Sigma \pm n^{2m+2} + \frac{\varphi^4}{1..4}\Sigma \pm n^{2m+4} - \&c.$$

Nun verschwinden alle hier vorkommende Partialsummen: also erhellt, daß auch $S = \Sigma \pm n^{2m}$ cos. $n\varphi = 0$ seyn werde. Eine Ausnahme macht der Fall $2m = 0$, wo $\Sigma \pm n^{2m} = \frac{1}{2}$ ist: welche Größe demnach auch S für diesen Fall ausdrückt, wie schon oben ist erwiesen worden. — Setzt man hier statt φ, $\pi - \varphi$: so wird, für die Reihe mit gleichen bejahten Zeichen, $\Sigma\, n^{2m}$ cos. $n\varphi = 0$, ausser für $2m = 0$, wo die Summe $= -\frac{1}{2}$ ist. — Bey Reihen von Sinussen verfährt man ganz auf dieselbige Weise, und so findet sich: $\Sigma \pm n^{2m-1}$ s. $\varphi = 0$, ohne Einschränkung: daraus folgt auch $\Sigma\, n^{2m-1}$ s. $\varphi = 0$.

2) Betrachtet man, wie im vorhergehenden, auch Potenzen der Cosinusse und Sinusse, so ergiebt sich, zuerst für den einfachsten Fall folgendes: die Reihe:

$$\text{cos.}\,\varphi^r - \text{cos.}\,2\varphi^r + \text{cos.}\,3\varphi^r - \text{cos.}\,4\varphi^r + \&c. \ldots = S$$

wird mit Hülfe des in (VI. 1.) angegebenen Ausdrucks also verwandelt, daß $S =$

$$= \frac{1}{2^r}\left\{\begin{array}{l} \text{cos.}\,r\varphi + \frac{r}{1}.\text{cos.}(r-2)\varphi + r\frac{(r-1)}{1.2}\text{cos.}(r-4)\varphi \\ -\text{cos.}\,2r\varphi - \frac{r}{1}.\text{cos.}(r-2)2\varphi - \&c. \\ +\text{cos.}\,3r\varphi + \frac{r}{1}.\text{cos.}(r-2)3\varphi \\ -\&c. \qquad -\&c. \end{array}\right\}$$

Die Cosinusse, welche vertikal unter einander geschrieben sind, und einen Binomial-Coefficienten zum Factor haben, machen für sich Reihen aus, deren gemeinschaftliche Summe $= \frac{1}{2}$. Daraus folgt $S =$

$$= \frac{1}{2^{r+1}}\left(1 + r + r\frac{(r-1)}{1 \cdot 2} + r\frac{(r-1)(r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c.\right)$$

$= \frac{1}{2} = \Sigma \pm \cos. n\varphi^r$. Setzt man hier vor φ, $\pi - \varphi$, so entsteht für ungerade $r = 2l - 1$: $\Sigma \cos. n\varphi^{2l-1} = -\frac{1}{2}$.

3) Auf gleiche Weise läßt sich $\Sigma \pm \cos. n\varphi^r \cdot n^{2m}$ behandeln. Wenn man dasselbe Verfahren beobachtet, so wird diese Summe

$$= \Sigma \pm \frac{n^{2m}}{2^r}\left\{\begin{array}{l} \cos. rn\varphi + r\cos. (r-2)n\varphi \\ \qquad + r\frac{(r-1)}{1 \cdot 2}\cos. (r-4)n\varphi \\ \qquad + \&c. \end{array}\right\}$$

$= 0$, weil nach (1) alle Partialreihen der einfachen Cosinusse verschwinden. Der Fall $m = 0$ ist wie in (1) ausgenommen. Für ungerade r erhält man wie in (2) $\Sigma n^{2m} \cos. \varphi^{2l-1} = 0$.

4) Für Reihen von Sinussen ergibt sich:

$$\text{f.} \varphi^r - 2^m \text{f.} 2\varphi^r + 3^m \text{f.} 3\varphi^r - \&c.$$
$$= \Sigma \pm n^m \text{f.} n\varphi^r = 0$$

wenn r und m zugleich ungerade oder gerade Zahlen sind. Im ersten Falle ist noch $\Sigma n^m \sin. n\varphi^r = 0$; also auch $\Sigma (2n-1)^m \cdot \sin. (2n-1)\varphi^r = 0$. Setzt man

hier $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so wird $\Sigma \pm (2n-1)^m$, oder die Summe folgender undendlichen Reihe:

$$1 - 3^m + 5^m - 7^m + \&c. = 0,$$

für jedes ungerade m.

X. Reciproke Reihen von Potenzen der ungeraden Zahlen, auch mit Cosinussen und Sinussen vielfacher Bögen.

1) Die Reihen, deren Summen hier untersucht werden sollen, sind unter folgenden zwoen Formen begriffen:

$$\cos.\,\varphi - \frac{\cos.\,3\varphi}{3^{2m-1}} + \frac{\cos.\,5\varphi}{5^{2m-1}} - \&c.$$

$$= \Sigma \pm \frac{\cos.\,2n-1)\,\varphi}{(2n-1)^{2m-1}}$$

$$\mathrm{f.}\,\varphi - \frac{\mathrm{f.}\,3\varphi}{3^{2m}} + \frac{\mathrm{f.}\,5\varphi}{5^{2m}} - \&c. = \Sigma \pm \frac{\mathrm{f.}\,(2n-1)\,\varphi}{(2n-1)^{2m}}$$

Setzt man in der ersten $\varphi = 0$, so werden die Zähler alle $= 1$, und man erhält eine Reihe von Potenzen der ungeraden Zahlen mit abwechselnden Zeichen. Der Exponent der Potenzen ist gleichfalls eine ungerade Zahl. Für diesen Fall hat **Euler** die Summation gefunden, auch das Gesetz, nach welchem die Summen fortgehen, bemerkt, mit Hülfe einer Methode, welche der in (I, 1.) angezeigten ähnlich ist *).

*) Opuscul. Analyt. T. II. p. 268 &c.

2) Um die Anwendung des seither beobachteten Verfahrens bey gegenwärtiger allgemeineren Untersuchung durch ein Beyspiel zu erläutern, setze man in der ersten Reihe (1) $m = 2$; so wird die Summe der Reihe:

$$\cos.\varphi - \frac{\cos. 3\varphi}{3^3} + \frac{\cos. 5\varphi}{5^3} - \&c. = \mathfrak{S}$$

also gefunden. Man löse die Cosinusse von φ, 3φ u. s. w. in ihre Progressionen auf, ordne solche nach den Potenzen von φ zusammen, so erhält man diese Verwandlung:

$$\mathfrak{S} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \&c. - \frac{\varphi^2}{1.2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \&c.\right)$$
$$+ \frac{\varphi^4}{1\ldots4}(1 - 3 + 5 - \&c.)$$
$$- \&c.$$

Die Reihe, welche in $-\frac{\varphi^2}{1.2}$ multiplicirt ist, hat bekanntlich zur Summe $\frac{\pi}{4}$. Die Summen der folgenden Coefficienten-Reihen verschwinden; demnach wird $\mathfrak{S} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \&c. - \frac{\varphi^2 \pi}{8}$. Setzt man hier $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so ist $\mathfrak{S} = 0$, also $\Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$: daraus $\Sigma \pm \frac{\cos.(2n-1)\varphi}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3 - 4\pi\varphi^2}{32}$.

3) Das allgemeine bey diesem Verfahren ist leicht leicht abzunehmen. Es wird nemlich folgender Satz zum

Grunde gelegt: $\Sigma \pm (2n-1)^r = 0$, für jedes ungerade r *). Setzt man demnach statt der Cosinusse ihre Ausdrückungen durch unendliche Reihen, und nimmt gleiche Potenzen von φ zusammen, so verschwinden die Coefficienten-Reihen derjenigen Potenzen, welche einen größern Exponenten als $2m-2$ haben. Die Summe der letzten übrigbleibenden Reihe: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c.$ ist $= \frac{\pi}{4}$. Also erhält man: $\Sigma \pm \frac{\cos.(2n-1)\varphi}{(2n-1)^{2m-1}} =$

$$= \Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-1}} - \frac{\varphi^2}{1.2}.\Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-3}}$$

$$+ \frac{\varphi^4}{1..4}\Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-5}} - \&c \ldots\ldots$$

$$\pm \frac{\varphi^{2m-4}}{1\ldots 2m-4}.\Sigma \frac{1}{(2n-1)^3} \mp \frac{\varphi^{2m-2}}{1\ldots 2m-2}.\frac{\pi}{4},$$

wobey die obern Zeichen der zween letzten Glieder gelten, wenn m eine gerade; die untern, wenn m eine ungerade Zahl ist **).

*) Ein Beyspiel dieses Satzes, für $r = 1$, findet man in Eulers Instit. Calc. Diff. p. 289. So allgemein der Satz hier ausgedrückt ist, enthält er doch nur einen besondern Fall der in (IX. 4.) erwiesenen Summation: eben so wie der in ähnlicher Absicht oben (I. 4.) zum Grunde gelegte Satz unter (IX. 2) begriffen ist.

**) Es ist offenbar, daß $\Sigma\, a.\varphi\, n = a\, \Sigma\, \varphi\, n$ ist, wenn a eine Constante bedeutet, dergleichen hier der Bogen φ mit seinen Potenzen ist. Daraus erhellt, daß die allgemeine Summation unmittelbar aus der Entwicklung, von $\cos.(2n-1)\varphi$ fließe: und zugleich die Dienlichkeit der hier gewählten Bezeichnungsart zur Erleichterung der allgemeinen Uebersicht.

4) Man setze hier $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so verschwinden cos. φ, cos. 3φ u. s. w.;. also wird:

$$0 = \Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-1}} - \frac{\pi^2}{2^2.1.2} \Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-3}}$$

$$+ \frac{\pi^4}{2^4.1...4} \Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-5}} - \&c. \ldots$$

$$\pm \frac{\pi^{2m-4}}{2^{2m-4}.1.2...2m-4} . \Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^3}$$

$$\pm \frac{\pi^{2m-2}}{2^{2m-2}.1...2m-2} . \frac{\pi}{4}.$$

Diese Gleichung drückt das allgemeine Gesetz aus, nach welchem die Summen der reciproken Reihen von Potenzen der ungeraden Zahlen, mit abwechselnden Zeichen, fortgehen. Zugleich übersieht man daraus ihren Zusammenhang mit der allgemeineren Summation in (3).

5) Bey der Summation der andern Reihe in (1), mit Sinussen, wird dasselbe Verfahren beobachtet. Man erhält nachfolgenden allgemeinen Ausdruck:

$$\Sigma \pm \frac{\text{sin.}(2n-1)\varphi}{(2n-1)^{2m}} = \varphi \Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-1}}$$

$$- \frac{\varphi^3}{1.2.3} \Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-3}} + \&c \ldots\ldots$$

$$\pm \frac{\varphi^{2m-3}}{1...2m-3} . \Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^3} \mp \frac{\varphi^{2m-1}}{1...2m-2} . \frac{\pi}{1}$$

6) Für höhere Potenzen der Cosinusse und Sinusse lassen sich ähnliche Sätze, wie in (VI.), erweisen. So

erhellt, daß $\Sigma \pm \frac{\sin.(2n-1)\varphi^r}{(2n-1)^m}$ immer gefunden werden könne, wenn von den beyden Exponenten r und m der eine gerade, der andere ungerade ist. Für jedes r, was $> m - 1$ ist, wird die Summe verschwinden; ist $r = m - 1$, so wird dieselbe $= \pm \frac{\pi}{4} . \varphi^r$.

XI. Summation der Reihen in (III. IX. X.) unter einer allgemeineren Gestalt.

1) Aus dem allgemeinen Gliede $= \frac{n^{\pm 2g}}{(n^2 - \lambda^2)^k}$ entspringt eine Reihe, welche für $\lambda = 0$ die reciproke und directe Reihen der geraden Potenzen der natürlichen Zahlen unter sich begreift. Man kann jenen Ausdruck noch durch cos. $n\varphi$, überhaupt durch cos. $n\varphi^r$ multipliciren, oder auch durch sin. $n\varphi$, wenn statt des Exponenten $2g$ im Zähler eine ungerade Zahl genommen wird. So ergeben sich Reihen, von welchen die in (III.) untersuchten einen besondern Fall ausmachen. Setzt man hier vor n, $2n-1$, so entsteht eine ähnliche allgemeine Form für die Reihen in (X.)

2) Es sey zuerst $k = 1$; man mache den Anfang der Betrachtung mit der Reihe von Sinussen, daß also statt $2g$, $2g-1$ geschrieben wird; so findet man $\Sigma \pm \frac{n^{2g-1} . \sin. n\varphi}{n^2 - \lambda^2} = S$, durch gegenwärtige Methode, folgendergestalt. Man drücke sin. $n\varphi$ durch die

gehörige unendliche Reihe aus, so wird

$$S = \varphi\, \Sigma \pm \frac{n^{2g}}{n^2 - \lambda^2} - \frac{\varphi^3}{1.2.3}\, \Sigma \pm \frac{n^{2g+2}}{n^2 - \lambda^2} + \frac{\varphi^5}{1..5}\, \Sigma \pm \frac{n^{2g+4}}{n^2 - \lambda^2} - \&c. \text{ in inf.}$$

Nun ist ist für jedes bejahte gerade m, $\Sigma \pm \frac{n^m}{n^2 - \lambda^2} = \frac{\lambda^{m-1}\pi}{2 \sin. \lambda\pi}$ *). Also verwandelt sich S in folgenden Ausdruck: $S = \frac{\pi\lambda^{2g-2}}{2 \sin. \lambda\pi}\left(\lambda\varphi - \frac{\lambda^3\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\lambda^5\varphi^5}{1...5} - \&c.\right)$. Die Summe der Reihe, welche den einen Factor ausmacht, ist bekanntlich $= \sin. \lambda\varphi$; also wird $S = \frac{\pi\lambda^{2g-2}. \sin. \lambda\varphi}{2 \sin. \lambda\pi}$. Diese Summation, verbunden mit (VII. 7.) **) gibt folgende allgemeinere:

$$\Sigma \pm \frac{n^{2g-1}. \sin. n\varphi^r}{n^2 - \lambda^2} = \pm \frac{\pi\lambda^{2g-2}. \sin. \lambda\varphi^r}{2 \sin. \lambda\pi},$$

für jedes ungerade r ***). Differentiirt man diese Gleichung, λ als veränderlich angenommen, so findet man

*) *Euler* Opusc. Analyt. T. II. p. 103 &c. vergl. §. seq.

**) Wegen der Zeichen gilt auch hier die dort gemachte Bemerkung.

***) Den Fall $g = 1$, $r = 1$ lehrt Euler (l. c. p. 73. 74). Er hat diese Summation durch zusammengesetzte Integrationen gefunden, und aller Aufmerksamkeit würdig erklärt: daher es mir nicht überflüßig schien zu zeigen, wie gegenwärtige Methode zu einer allgemeineren Summation führe, unter welcher Eulers Satz mit begriffen ist; auch ausser dem noch zu andern ähnlichen Summationen. — Der Fall, da g negativ ist, wird im folgenden §. untersucht.

die Summe einer Reihe, in welcher statt $n^2 - \lambda^2$, die zweyte Potenz dieser Grösse vorkommt. Die Wiederholung dieses Verfahrens gibt die Summe für $(n^2 - \lambda^2)^k$.

3) Bey den Reihen von Cosinussen verfährt man auf ähnliche Weise: es wird nemlich, wenn man cos. $n\varphi$ in eine unendliche Reihe auflöst,

$$\Sigma \pm \frac{n^{2g}.\text{cos}.\, n\varphi}{n^2 - \lambda^4} = \Sigma \pm \frac{n^{2g}}{n^2 - \lambda^2} - \frac{\varphi^2}{1.2} \Sigma \pm \frac{n^{2g+2}}{n^2 - \lambda^2}$$

$$+ \frac{\varphi^4}{1..4} \Sigma \pm \frac{n^{2g+4}}{n^2 - \lambda^2} - \text{in inf.}$$

$$= \frac{\lambda^{2g-1}\pi}{2\,\text{f.}\,\lambda\pi}\left(1 - \frac{\varphi^2\lambda^2}{1.2} + \frac{\varphi^4\lambda^4}{1..4} - \&c.\right)$$

$$= \frac{\lambda^{2g-1}\pi\,.\,\text{cos}.\,\lambda\varphi}{2\,\text{fin}.\,\lambda\pi}.$$

Ist $g = 0$, so wird $\Sigma \pm \frac{n^{2g}}{n^2 - \lambda^2} = \frac{\pi}{2\lambda\,\text{fin}.\,\lambda\pi} - \frac{1}{2\lambda^2}$; also für diesen Fall auch $\Sigma \pm \frac{\text{cos}.\,n\varphi}{n^2 - \lambda^2} = \frac{\pi\,\text{cos}.\,\lambda\varphi}{2\lambda\,\text{f.}\,\lambda\pi}$ $- \frac{1}{2\lambda^2}$ *). Für jedes andere g gilt der nur erwiesene Ausdruck. Verbindet man diese Summationen mit dem in (VI. 1.) angegebenen Ausdrucke für cos. φ^r, so erhält man: $\Sigma \pm \frac{n^{2g}\,\text{cos}.\,n\varphi^r}{n^2 - \lambda^2} = \frac{\pi\lambda^{2g-1}\,\text{cos}.\,\lambda\varphi^r}{2\,\text{fin}.\,\lambda\pi}$. Für $g = 0$ muß noch $\frac{1}{2\lambda^2}$ abgezogen werden. — Da eine

*) Diesen Fall hat Euler (l. c.) aus dem Fall $g = 1$ bey der andern Reihe, abgeleitet.

gerade Potenz des Sinus in Cosinusse aufgelöset wird, so fließt aus jener Summation für gerade r noch folgender

Satz: $\Sigma \pm \frac{n^{2g} . \text{s.} n \varphi^r}{n^2 - \lambda^2} = \pm \frac{\lambda^{2g-1} . \pi . \text{s.} \lambda \varphi^r}{2 \text{s.} \lambda \pi}$.

Für höhere Potenzen von $n^2 - \lambda^2$ werden die Summen durch fortgesetzte Differentiationen gefunden.

4) Die Reihen in (X.) lassen sich auf ähnliche Weise allgemeiner betrachten. Es ist nemlich

$$\Sigma \pm \frac{(2n-1)^{2g-1} . \text{cos.} (2n-1) \varphi}{(2n-1)^2 - \lambda^2} =$$

$$\Sigma \pm \frac{(2n-1)^{2g-1}}{(2n-1)^2 - \lambda^2} - \frac{\varphi^2}{1.2} \Sigma \pm \frac{(2n-1)^{2g+1}}{(2n-1)^2 - \lambda^2}$$

$+$ &c. Nun ist für jedes ungerade q,

$\Sigma \pm \frac{(2n-1)^q}{(2n-1)^2 - \lambda^2} = \frac{\pi \lambda^{q-1}}{4 \text{cos.} \frac{\lambda \pi}{2}}$. Also wird jene

$$\text{Summe} = \frac{\pi \lambda^{2g-2}}{4 \text{cos.} \frac{\lambda \pi}{2}} \left(1 - \frac{\lambda^2 \varphi^2}{1.2} + \frac{\lambda^4 \varphi^4}{1..4} - \text{\&c.}\right)$$

$= \frac{\pi \lambda^{2g-2}}{4 \text{cos.} \frac{\lambda \pi}{2}} . \text{cos.} \lambda \varphi$ — Kommt in dem allgemeinen Gliede der Reihe statt cos. $(2n-1) \varphi$, jedwede r^{te} Potenz dieses Cosinus vor, so wird in die Summe ebendieselbe Potenz von cos. $\lambda \varphi$ gesetzt.

5) Auf gleiche Weise erhält man

$$\Sigma \pm \frac{(2n-1)^{2g} \text{ fin. } (2n-1)\varphi}{(2n-1)^2 - \lambda^2} = \frac{\pi \lambda^{2g-1}}{4 \text{ cof. } \frac{\lambda \pi}{2}} \text{ fin. } \lambda \varphi$$

Für eine ungerade Potenz von fin. $(2n-1)\varphi$ kommt in die Summe eben diese Potenz von fin. $\lambda \varphi$; aber für ein gerades r wird $\Sigma \pm \frac{(2n-1)^{2g-1} . \text{f.} (2n-1)\varphi^r}{(2n-1)^2 - \lambda^2}$ $= \frac{\pi \lambda^{2g-2}}{4 \text{ cof. } \frac{\lambda \pi}{2}} . \text{ cof. } \lambda \varphi^r$. Für höhere Potenzen des Nenners finden sich die Summen durch wiederholte Differentiationen, λ als veränderlich angenommen.

XII. Fortsetzung.

1) Die in (XI. 2.) vorausgesetzte Summation:

$\Sigma \pm \frac{n^{2g}}{n^2 - \lambda^2} = \mathfrak{S} = \frac{\lambda^{2g-1} \pi}{2 \text{ fin. } \lambda \pi}$ beruhet auf folgenden Gründen: für $g = 0$ wird, durch Zerfällung des quadratischen Factors in zween einfache,

$\mathfrak{S} = \frac{1}{2\lambda}\left(\Sigma \pm \frac{1}{n - \lambda} - \Sigma \pm \frac{1}{n + \lambda}\right)$. Diese einfachen Reihen lassen sich leicht in Integrale auflösen, und so erhält man $\mathfrak{S} = -\frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda} \text{ f. } \frac{(x^{\lambda-1} + x^{-\lambda}) dx}{1 + x}$, das Integral so genommen, daß es für $x = 0$ verschwindet, und dann $x = 1$ gesetzt wird. Nun ist in diesem

Sinne der Werth des Integrals *) $= \frac{\pi}{\sin. \pi \lambda}$; also wird $S = -\frac{1}{2 x^2} + \frac{\pi}{2 \lambda . \sin. \lambda \pi}$.

2) Für jedes ganze bejahte g ergibt sich durch Division $\frac{n^{2g}}{n^2 - \lambda^2} = n^{2g-2} + \lambda^2 n^{2g-4} + \ldots\ldots + \lambda^{2g-2} . n^0 + \frac{\lambda^{2g}}{n^2 - \lambda^2}$. Nun ist immer $\Sigma \pm n^{2m} = 0$, außer für $m = 0$, da diese Summe $= \frac{1}{2}$ wird. Daraus folgt: $\Sigma \pm \frac{n^{2g}}{n^2 - \lambda^2} = \frac{\lambda^{2g-2}}{2} + \lambda^{2g} \left(\frac{\pi}{2 \lambda \, \text{f.} \, \lambda \pi} - \frac{1}{2 \lambda^2} \right) = \frac{\pi \lambda^{2g-1}}{2 \sin. \lambda \pi}$ **).

*) Diese Integration hat Euler zuerst in den Miscell. Berolin. T. VII. p.129 u. s. w. gelehrt: und nachgehends eben denselben Beweis wiederholt in den Nov. Comment. Petrop. T. XIX. und in den Act. Petrop. P. I. (1781). Eigentlich ist das in diesen Stellen untersuchte Integral $= \text{f.} \frac{(y^{m-1} + y^{n-m-1}) dy}{1 + y^n}$. Setzt man aber $y^n = x$, so erhält das Integral im Text eben dieselbe allgemeinere Form.

**) Diese Summation erweist Euler in den Opusc. Analyt. T. II. p. 130 &c. (Petrop. 1785). Er bedient sich dabey eines besondern Verfahrens, transcendente Summen unendlicher Reihen zu finden, was mit demjenigen einige Aehnlichkeit hat, wodurch er zuerst die Summen der reciproken Reihen entdeckte (I. 1). Weil nemlich Sinusse und Cosinusse durch Producte aus unendlich vielen Factoren sich darstellen lassen, so zerfällt er Functionen, in welchen jene als Nenner vorkommen, in unendlich viele einfache Partial-Brüche. Vielleicht könnte man noch zweifeln, ob jenes Verfahren, dessen Richtigkeit für alge-

3) Aus (1) folgt $\Sigma \pm \frac{\cos. n\,\phi}{n^2 - \lambda^2}$, übereinstimmend mit der Angabe in (XI. 4). Setzt man vor ϕ, $\pi - \phi$, so werden alle Zeichen in der Reihe negativ, und man erhält $\Sigma \frac{\cos. n\,\phi}{n^2 - \lambda^2} = - \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\pi \cos. \lambda(\pi - \phi)}{2\lambda \sin. \lambda\pi}$.

Für

braische Functionen und eine endliche Zahl von Factoren erwiesen ist (Kästners Analys. d. Unendl. §. 347 rc.), auf transcendente Functionen und unendliche Reihen-Ausdrücke in gehöriger Schärfe angewandt werde. Wenn auch im Zähler eine transcendente Function vorkommt, wie im Nenner, wo also in beyden die Dimension unendlich ist, gesteht Euler selbst, daß das Verfahren nicht mit Sicherheit könne gebraucht werden: bey Reihen, die er doch auch in diesem Falle dadurch summirt hat, sucht er den Zweifel so zu heben, daß er in besondern Fällen die Richtigkeit des Resultats noch aus andern Gründen zeigt. — Indessen auch diese Betrachtungen beyseite gesetzt, bleibt doch, wie es mir scheint, die angezeigte Methode, als Summations-Methode, indirect, weil die Summen angenommen, und daraus die Reihen erst gebildet werden; und dann particular, weil sie nur gerade bey solchen Reihen, in deren Summen Sinusse und Cosinusse als Nenner vorkommen, brauchbar seyn kann. — Deswegen habe ich mich bey gegenwärtiger Untersuchung eines andern Verfahrens bedient, was mit der vorhergehenden Darstellungsart genauer zusamenhängt. Auch schien mir es nicht überflüßig, einige andere Summationen, welche Euler auf die angezeigte Weise gefunden hat, aus andern Grunden abzuleiten. Meistens — so auch hier — zeigt sich bey Sätzen, die auf einem abgelegenen Nebenwege gefunden worden sind, daß ihre Untersuchung aus allgemeinern Gründen auch allgemeinere Resultate gibt. So findet man z. B. die Summen auch für ungerade und verneinte Exponenten (nach 4. und 5.), auf welche jenes Verfahren unmittelbar sich nicht erstreckt: obgleich Euler, durch einen Rechnungsfehler verleitet, dasselbe auch auf ungerade Exponenten angewendet hat.

Für $\varphi = 0$ folgt daraus $\Sigma \frac{1}{n^2 - \lambda^2} = -\frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\pi}{2\lambda . \mathrm{tang.}\, \lambda\pi}$. Wenn man diese Summe, wie in (1) durch Integrale ausdrückt, so ergiebt sich $\int \frac{(x^{\lambda-1} - x^{-\lambda})\, dx}{1-x} = \frac{\pi}{2\lambda\, \mathrm{tang.}\, \lambda\pi}$: den Werth des Integrals von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen *).

4) Für ungerade Exponenten im Zähler läßt sich $\pm \frac{n^{2g-1}}{n^2 - \lambda^2}$ eben so wie in (2) auflösen: und so folgt die Summe der unendlichen Reihe für dieses allgemeine Glied $= \Sigma \pm n^{2g-3} + \lambda^2 \Sigma \pm n^{2g-5} + \ldots + \lambda^{2g-4} \Sigma \pm n + \lambda^{2g-2} \Sigma \pm \frac{n}{n^2 - \lambda^2}$. Diese Partial-Summen lassen sich, bis auf die letzte, bequem durch die Bernoullischen Zahlen ausdrücken. Es ist nemlich **) für jedes ungerade $2r - 1$,

$\Sigma \pm n^{2r-1} = \pm \left(\frac{2^{2r} - 1}{2r}\right) \mathfrak{A}^R$, wenn $\mathfrak{A}^R$ die $r$te Bernoullische Zahl bedeutet. Das obere Zeichen gilt für ein ungerades, das untere für ein gerades r. Also kommt es nur noch auf $\Sigma \pm \frac{n}{n^2 - \lambda^2}$ an. Durch Zerfällung findet sich das doppelte dieser Summe

*) Diese Integration hat Euler auch besonders erwiesen (l. c. vergl. die vornächste Anm.)

**) Instit. Calc. Diff. P. II. p. 201. Vergl. unten §. XV.

$= \int \frac{(x^{\lambda} + x^{-\lambda})\lambda x}{1 + x}$, von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen. Wenn $\lambda = \frac{p}{q}$, wo p und q ganze Zahlen bedeuten müssen, p eine kleinere als q, so läßt sich das Integral angeben *). Es findet sich nemlich, wenn man die Rechnung gehörig führt und abkürzt, $= \frac{1}{2\lambda} + \frac{\int 2p\pi}{2\int \pi\lambda} \log. 2$

$$+ S. \cos. (2n-1)\lambda\pi . \log.\left(1 + \frac{\cos. (2n-1)\pi}{2q}\right)$$

wobey S (wie bisher) eine endliche Summe andeutet, nemlich die Summe aller Werthe der nach dem Zeichen geschriebenen Größen, hier von $n = 1$ bis $n = q$ genommen **).

5) Für negative Exponenten des Zählers gilt dasselbe Verfahren. Es wird nemlich durch Zerfällung:

$$\frac{1}{n^{2g}(n^2 - \lambda^2)} = \frac{1}{\lambda^{2g}(n^2 - \lambda^2)} - \frac{1}{\lambda^{2g} n^2}$$

$$- \frac{1}{\lambda^{2g-2} n^4} - \ldots - \frac{1}{\lambda^2 n^{2g}}$$ (wovon man sich

*) Kästners Analys. des Unendl. §. 298/99. Die Substitutionen, die man vorher noch gebrauchen muß, verstehen sich von selbst.

**) Nach Eulern ist für ungerade m, $\Sigma \pm \frac{n^m}{n^2 - \lambda^2} = \frac{\lambda^m \pi}{2 \int \lambda\pi}$ welche Angabe von der im Text gänzlich verschieden ist. Daß sie nicht die richtige sey, erhellt schon daraus, weil sonst diese Summe mit der für den nächstfolgenden geraden Exponenten einerley seyn müßte. Man wird aber auch den Grund des Versehens mit mäßiger Aufmerksamkeit entdecken. So erhalten auch die daraus abgeleiteten Folgerungen eine ganz andere Gestalt.

auch überzeugen kann, wenn man die abgezogene Reihe als eine geometrische summirt). Nun sind $\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m}}$; $\Sigma \frac{1}{n^{2m}}$ für jedes gerade $2m$ aus (III.) bekannt, und $\Sigma \pm \frac{1}{n^2 - \lambda^2}$; $\Sigma \frac{1}{n^2 - \lambda^2}$ aus (1) und (3). Daraus findet man also auch $\Sigma \pm \frac{1}{n^{2g}(n^2 - \lambda^2)}$; $\Sigma \frac{1}{n^{2g}(n^2 - \lambda^2)}$: gleicherweise ergeben sich daraus die Summen dieser Reihen, wenn im Zähler cos. $n\varphi$ oder eine jedwede Potenz davon vorkommt. Für Reihen von Sinussen erhält man durch dieses Verfahren $\Sigma \pm \frac{\text{sin. } n\varphi}{n^{2g-1}(n^2 - \lambda^2)}$, wo also der Exponent von n im Nenner eine ungerade Zahl seyn muß. Sonst läßt sich für solche Exponenten $\Sigma \pm \frac{1}{n^{2g-1}(n^2 - \lambda^2)}$ nicht angeben, außer wann $g = 1$, in welchem Falle diese Summe $= \frac{\log. 2}{\lambda^2} + \text{f.} \frac{(x^{\lambda-1} - x^{-\lambda})\,dx}{1+x}$ wird; das Integral ist mit dem in (4) einerley.

6) Wenn im Nenner statt $n^2 - \lambda^2$, $n^2 + \mu^2$ vorkommt, so setzt man $\lambda = \mu\sqrt{-1}$, und gebraucht statt der Sinusse und Cosinusse ihre imaginäre Ausdrükkungen durch Exponential-Größen: dabey heben sich die unmöglichen Größen durch Division auf. Nach dieser

Vorschrift findet sich zum Beyspiel $\Sigma \pm \frac{n^{2g} \cos. n\,\phi}{n^2 + \mu^2}$
$= \pm \frac{\mu^{2g-1} \cdot (e^{\mu\phi} - e^{-\mu\phi})}{e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}}$, wobey das obere Zeichen gilt, wenn g eine ungerade Zahl ist; sonst gilt das untere.

7) Wenn man die Gründe des seitherigen Verfahrens im allgemeinen übersieht, so wird man bald bemerken, daß sich dasselbe noch weiter erstrecke. Es sey N eine ganze, rationelle und zwar gerade Function des Index n, d. i. eine solche, welche nur gerade Potenzen von n enthält, so wird in der Gleichung $N = 0$ einer bejahten Wurzel $+\lambda$, die gleiche verneinte $-\lambda$, einer unmöglichen $+\mu\sqrt{1}$, die andere $-\mu\sqrt{-1}$ entsprechen. Die Factoren der Function N sind demnach unter den zwey Formen: $n^2 - \lambda^2$, $n^2 + \mu^2$, begriffen: im Fall gleicher Wurzeln können auch jedwede Potenzen dieser Grössen, für λ oder $\mu = 0$, auch Potenzen von n, aber nur gerade, vorkommen. Nun sey M auch eine gerade Function von n, daß also $\frac{M}{N}$ eine eben solche gebrochene Function vorstelle: so wird sich diese in Brüche von der Form: $\frac{\mathfrak{A}}{n^2 - \lambda^2}$, und $\frac{\mathfrak{B}}{n^2 + \mu^2}$ auflösen lassen, wenn die Dimension in M kleiner ist als die in N: erwähntermaßen können auch durch diese Zerfällung Potenzen eines solchen quadratischen Factors, oder gerade Potenzen von n in die Nenner der Partialbrüche kommen. Damit die seitherigen Betrachtungen verbunden, ergibt

sich allgemein, wie nachstehende Summen: $\Sigma \pm \frac{M}{N}$; $\Sigma \frac{M}{N}$; $\Sigma \pm \frac{M}{N} \cos. n\varphi$; $\Sigma \frac{M}{N} \cos. n\varphi$; gefunden werden können. Ist die Dimension von n in M größer als in N, so läßt sich durch Division eine ganze Function $\mathfrak{N}$ absondern, die gleichfalls nur gerade Potenzen von n, und zuletzt die 0te oder eine beständige Größe C enthalten wird. Aus dem vorhergehenden (IX. 1.) ist bekannt, daß $\Sigma \pm \mathfrak{N} = \frac{C}{2}$ seyn werde: eben dieser Ausdruck gilt auch für $\Sigma \pm \mathfrak{N} . \cos. n\varphi$; aber $\Sigma\ \mathfrak{N}$ wird unendlich. — Wenn von den beyden Functionen M und N, die eine ungerade ist, so ergiebt sich auf ähnliche Weise $\Sigma \pm \frac{M}{N} . \sin. n\varphi$; $\Sigma \frac{M}{N} . \sin. n\varphi$. — Als Resultat dieser Betrachtungen fließt endlich daraus die allgemeine Summation aller unendlichen Reihen, mit gleichen oder abwechselnden Zeichen, deren allgemeines Glied durch φn; $\varphi n . \cos. n\varphi$; $\psi n . \sin. n\varphi$ ausgedrückt wird: wenn φn . irgend eine algebraische rationelle gerade Function von n: ψn eine ungerade vorstellt. Nimmt man noch dazu, was in (VI.) und (VII.) ist gesagt worden, so erhellt, daß in dem zweyten Ausdrucke, statt $\cos. n\varphi$, jedwede ganze Function des Cosinus, oder eine ganze gerade Function von $\sin. n\varphi$, in dem dritten Ausdrucke eine eben solche ungerade Function vorkommen könne. Man bemerkt leicht, wie die reciproke Reihen von den geraden Potenzen der natürlichen Zahlen und diejenigen Reihen, welche ich vorhin nach

Eulern angeführt habe, unter jener allgemeinen Form als einzelne Fälle begriffen sind.

8) Eben dieselbigen Schlüsse lassen sich anbringen, um die in (XI. 4.) angefangenen Betrachtungen für ungerade Zahlen, zu ihrer größten Allgemeinheit zu erheben. Zuerst für den einfachsten Fall ist $\Sigma \pm \frac{2n-1}{(2n-1)^2-\lambda^2}$ $= S = \frac{1}{2}\left(\Sigma \pm \frac{1}{2n-1+\lambda} + \Sigma \pm \frac{1}{2n-1-\lambda}\right)$. Diese zwey Summen lassen sich wiederum in Integrale auflösen, und so erhält man $S = \frac{1}{2}\int \frac{(x^{\lambda} + x^{-\lambda})\, dx}{1-x^2}$ $= \frac{\pi}{4 \cos \frac{\pi \lambda}{2}}$ (den Werth des Integrals in dem mehrmals erwähnten Sinne genommen) Kommt in dem allgemeinen Gliede statt $2n-1$, eine ungerade Potenz davon vor, mit dem Exponenten q, so wird der Zähler des Ausdrucks der Summe noch mit λ^{q-1} multiplicirt. Verneinte Exponenten werden wie in (5) behandelt. So ergiebt sich wie in (7) die allgemeine Summation aller Reihen mit abwechselnden Zeichen, deren allgemeine Glieder durch $\pm\psi.(2n-1)$; $\pm\psi(2n-1).\cos.(2n-1)\varphi$; $\pm\varphi(2n-1).\sin.(2n-1)\varphi$, dargestellt werden: wenn φ und ψ eben die Bedeutungen haben wie in (7); durch φ eine gerade, durch ψ eine ungerade Funktion, ganze oder gebrochene, von $2n-1$ bezeichnet wird *).

*) Es versteht sich daß eine gebrochne Function dann ungerade ist, wenn Zähler und Nenner in dieser Hinsicht ungleichartig sind, d. i. der eine eine ungerade, der andere eine gerade

XIII. Zusatz von einigen andern ähnlichen Reihen.

1) Unter die Reihen, deren Summen Euler durch die in der Anmerkung zu (XII. 2.) erwähnte Methode gefunden hat, gehört folgende:

$$\frac{1}{\lambda^2 - \mu^2} + \frac{1}{(\lambda - 2)^2 - \mu^2} + \frac{1}{(\lambda + 2)^2 - \mu^2}$$

$$+ \frac{1}{(\lambda - 4)^2 - \mu^2} + \&c. = \mathfrak{S}$$

Eigentlich ist diese Reihe eine Verbindung zwoer andern, welche denen vorhin betrachteten ähnlich sind: der einen allgemeines Glied ist $\frac{1}{(\lambda + 2n)^2 - \mu^2}$; der andern $\frac{1}{(\lambda - 2n)^2 - \mu^2}$ (dort wird n von 0 an gerechnet). So läßt sich hier gleichfalls das obige Verfahren der Zerfällung und Integration anbringen. Es entstehen vier Partialreihen, deren jede durch ein Integral dargestellt werden kann. Daraus ergibt sich:

$$\mathfrak{S} = -\frac{1}{2\mu} \int \frac{(x^{\alpha-1} - x^{-\alpha+1})\, dx}{1 - x^2}$$

$$+ \frac{1}{2\mu} \int \frac{(x^{\beta-1} - x^{-\beta+1})\, dx}{1 - x^2},$$

wenn der Kürze wegen $\lambda + \mu = \alpha$, $\lambda - \mu = \beta$ gesetzt

Function ist. Der charakteristische Unterschied zwischen diesen beyden Arten von Functionen beruhet darauf, daß die von der einen Art ihren Werth nicht verändern, wenn vor $+x$, $-x$ gesetzt wird, die von der andern Art alsdann einen entgegengesetzten Werth annehmen.

wird. Nimmt man die Particular-Werthe dieser Integrale, wie sie in (XII. 3.) angegeben sind *), so wird

$$\mathfrak{S} = \frac{\pi}{4\mu}\left(\cot.\frac{\beta\pi}{2} - \cot.\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2\mu}\cdot\frac{\sin.\mu\pi}{\cos.\mu\pi - \cos.\lambda\pi}.$$

Diesen Ausdruck, mit einiger Veränderung, hat Euler angenommen, und daraus, vermittelst des angezeigten Verfahrens, die Reihe gebildet.

2) Auf ähnliche Weise findet man die Summe jener Reihe, wenn die Zähler ihrer Glieder nach der Ordnung λ; $\lambda - 2$; $\lambda + 2$; u. s. w. sind, nemlich immer die Größen, von deren Quadrat in den Nennern μ^2 abgezogen wird. Die Summe der so entstehenden Reihe ist

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin.\lambda\pi}{\cos.\mu\pi - \cos.\lambda\pi}.$$

3) Untersucht man die Gründe dieses Verfahrens näher, so zeigt sich, daß sich dasselbe auch auf den Fall erstrecke, wenn in den Reihen (1) (2) von λ statt der geraden Zahlen, die natürlichen Zahlen nach der Ordnung abgezogen werden, sonst aber die Reihen unverändert bleiben. Unter dieser Gestalt findet sich die Summe der Reihe in (1), $= \frac{\pi}{2\mu}(\cot.\beta\pi - \cot.\alpha\pi)$; der in (2) $= \frac{\pi}{2}(\cot.\beta\pi + \cot.\alpha\pi)$. Das Verfahren

*) Die gegenwärtigen Integrale lassen sich nemlich leicht auf das dortige zurückbringen, wenn man $x^2 = y$ setzt.

beruhet wiederum auf der Zerfällung und Ausdrückung der Partial-Summen durch Integrale.

4) Die Größen, welche bey der in (2) betrachteten Reihe die Zähler ausmachen, können auch in die Nenner gebracht werden: dann ergiebt sich die Summe einer solchen Reihe $= \frac{\pi}{2\mu} \cdot \frac{(1 - \text{cos.}\, \mu\pi)}{\text{cos.}\, \mu\pi - \text{cos.}\, \lambda\pi} \cdot \text{cot.} \frac{\lambda\pi}{2}$.
Unter dieser Gestalt läßt sich auch die Reihe in (3) summiren.

5) Reihen, deren allgemeines Glied zum Zähler 1 hat, zum Nenner ein Product aus quadratischen Factoren von der Form $(n + \alpha)^2$, wo α eine ganze Zahl ist, lassen sich, durch eben dieses Verfahren der Zerfällung, auf die schon in (III.) untersuchten Reihen zurückführen. Es sey nemlich das allgemeine Glied

$$= \frac{1}{n^2 (n + \alpha)^2 (n + \beta)^2 (n + \gamma)^2 \text{ \&c.}} = N,$$

so erhält man durch Auflösung in Partial-Brüche,

$$N = \frac{\mathfrak{A}}{n^2} + \frac{\mathfrak{B}}{n} + \frac{\mathfrak{C}}{(n + \alpha)^2} + \frac{\mathfrak{D}}{(n + \alpha)} + \text{ \&c.}$$

Die Summen der quadratischen Brüche können aus (III.) genommen werden; es ist nemlich für jedes ganze α,

$\Sigma \frac{1}{(n + \alpha)^2} = \Sigma \frac{1}{n^2} - \text{S.} \frac{1}{n^2}$, wo die abgezogene Größe die endliche Summe $1 + \frac{1}{2^2} + \text{ \&c.} + \frac{1}{\alpha^2}$ bedeutet. Die Summen der einfachen Brüche werden unendlich, und mithin auch ΣN, wenn nicht $\mathfrak{D} = -\mathfrak{B}$

wird: dann hebt sich das unendliche auf; bey den übrigen Factoren wird zur Endlichkeit der Summe eine ähnliche Bedingung erfordert. Sind aber die Zeichen der Glieder in der Reihe abwechselnd, so ist $\Sigma \pm \frac{1}{n} = \log. 2$: Durch diesen Logarithmen läßt sich überhaupt, für jedes ganze α, $\Sigma \pm \frac{1}{\alpha + n}$ ausdrücken. Zugleich erhellt, daß im Zähler des allgemeinen Glieds N statt 1, jede ganze Function des Index n vorkommen könne. Dieses ist die allgemeinste Darstellungsart des Problems. Die specielle Auflösung verändert sich nach der Beschaffenheit der Zähler A, B. u. s. w. von den Partialbrüchen, und der ganzen Zahlen α, β u. s. w., welche in den Factoren des Nenners befindlich sind: jene hängen zum Theil von dem Zähler des allgemeinen Glieds, zum Theil von den nur genannten Zahlen ab. So kann sich, auch bey Reihen mit abwechselnden Zeichen, in manchen Fällen der logarithmische Theil aufheben: oder bey Reihen mit gleichen Zeichen, das Unendliche, wie schon ist erwähnt worden. Um davon ein Beyspiel zu geben, so findet sich für zween Factoren im Nenner, $\Sigma \frac{1}{n^2 (n+\alpha)^2} = -\frac{2}{\alpha^3} . \text{S.} \frac{1}{n} + \frac{\pi^2}{3\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} . \text{S.} \frac{1}{n^2}$, in welchem Ausdrucke die durch S angedeuteten endlichen Summen von $n = 1$ bis $n = \alpha$ genommen werden. Eben diese Reihe mit abwechselnden Zeichen hat zur Summe: $\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \text{S} \pm \frac{1}{n^2}\right)$.

$-\frac{2}{\alpha^3} S \pm \frac{1}{n}$, wenn α eine gerade Zahl ist: wegen der endlichen Summen gilt eben dasselbe. Ist aber α eine ungerade Zahl, so wird $\Sigma \pm \frac{1}{n^2 (n+\alpha)^2} = \frac{1}{\alpha^2} . S \pm \frac{1}{n^2}$ $- \frac{2}{\alpha^3}\left(2 \log. 2 - S \pm \frac{1}{n}\right)$. Hier hebt sich also derjenige Theil auf, welcher von der Quadratur des Kreises abhängt: aber der logarithmische Theil bleibt übrig. Für eine beliebige Anzahl $= m$ von quadratischen Factoren im Nenner ist $\Sigma \frac{1}{n^2 (n+\alpha)^2 (n+\beta)^2 (n+\gamma)^2 \ldots}$ $= (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \ldots) \frac{\pi^2}{6} - \mathfrak{B} . S \frac{1}{\alpha^2}$ $- \mathfrak{C} . S \frac{1}{\beta^2} - \mathfrak{D} . S \frac{1}{\gamma^2} - \&c. - B . S \frac{1}{\alpha} - C . S \frac{1}{\beta}$ $- D . S \frac{1}{\gamma} - \&c.$ *), wenn die Zähler der durch die Zerfällung des allgemeinen Glieds entspringenden quadratischen Partial-Brüche $= \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ u. s. w., der einfachen Brüche Zähler $= A, B, C, D$ u. s. w. sind. Dabey liegt diese Betrachtung zum Grunde: die Zähler werden dadurch bestimmt, daß man alle Brüche auf den gemeinschaftlichen Nenner bringt, wobey dann der ge-

*) Unter $S \frac{1}{\alpha^2}$ verstehe ich hier, der bisherigen Bezeichnungsart gemäß, die endliche Summe der quadratischen Brüche $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \ldots + \frac{1}{\alpha^2}$; eben so sind $S \frac{1}{\beta^2}$, $S \frac{1}{\gamma^2}$ u. s. w. zu nehmen.

meinschaftliche Zähler dem des allgemeinen Glieds gleichen muß. So wird der Coefficient der $2m - 1^{\text{ten}}$ Potenz von n, $= A + B + C + D +$ &c. $= 0$, weil diese Potenz fehlt. Daher fällt immer das Unendliche, was in $\Sigma \frac{1}{n}$, $\Sigma \frac{1}{n + \alpha}$ u. s. w., zu liegen scheint, weg. Diese Betrachtung erstreckt sich noch weiter, und zeigt überhaupt, daß der angegebene Ausdruck der Summe auch dann gelte, wenn im Zähler des allgemeinen Glieds, statt 1, irgend eine ganze Function von n vorkommt, deren Dimension wenigstens um 2 geringer ist, als die des Nenners. Wie für jeden besondern Fall die Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ u. s. w. A, B u. s. w. gefunden werden, bedarf hier keiner weitern Entwicklung. — Betrachtet man eben solche Reihen mit abwechselnden Zeichen, so verändert sich der Ausdruck der Summe vorzüglich nach Beschaffenheit der Zahlen α, β, γ u. s. w.: sind diese alle gerade, so fällt der logarithmische Theil weg, und die Summe wird $= (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \text{\&c.}) \frac{\pi^2}{12} - \mathfrak{B} . S \pm \frac{1}{\alpha^2}$

$$- \mathfrak{C} . S \pm \frac{1}{\beta^2} - \text{\&c.} - B . S \pm \frac{1}{\alpha} - C . S \pm \frac{1}{\beta}$$

— &c.: sind aber unter den Zahlen ungerade, so besteht die Summe aus 3 Theilen, einem algebraischen, einem zweyten welcher log. 2, und einem dritten, welcher π^2 enthält; dieser dritte kann nach Beschaffenheit der Zähler $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ... auch wegfallen. — Werden statt der natürlichen Zahlen, die ungeraden betrachtet, daß also statt n, $2n - 1$ geschrieben wird, oder noch allgemeiner $fn \pm g$, so lassen sich ähnliche Schlüsse anbringen, und

eben solche Sätze erweisen. Es wird hinlänglich gewesen seyn, das Verfahren im allgemeinen darzustellen, da die Auflösung der einzelnen Fälle leicht daraus abgeleitet werden kann *).

6) Verbindet man solche Reihen, wie in (5) untersucht worden sind, mit Reihen von Cosinussen, so ist auf den ersten Blick sichtbar, daß die Bögen nicht, wie seither, nach Vielfachen der natürlichen Zahlen fortschreiten können. So kann z. B. $\Sigma . \frac{\cos. n\varphi}{(n+\alpha)^2}$ nicht angegeben werden. Die arithmetische Progression zu erforschen, nach welcher die Bögen fortgehen müssen, damit die Summe der Reihen sich angeben lasse, dazu dient folgendes: Man drücke den n_{ten} Bogen allgemein durch $(an+b)\varphi$ aus, so wird für zween Factoren im Nenner $\Sigma \frac{\cos. (an+b)\varphi}{n^2 (n+\alpha)^2}$

$$= \frac{1}{\alpha^2} . \Sigma \frac{\cos. (an+b)\varphi}{n^2} - \frac{2}{\alpha^3} . \Sigma \frac{\cos. (an+b)\varphi}{n}$$

$$+ \frac{1}{\alpha^3} . \Sigma \frac{\cos. (a+bn)\varphi}{(n+\alpha)^2} + \frac{2}{\alpha^3} . \Sigma \frac{\cos. (a+bn)\varphi}{n+\alpha}.$$

Die Reihe welche aus dem dritten Ausdruck entspringt, gedenke man sich rückwärts fortgesetzt, und verbinde sie mit der ersten Reihe, daß diejenigen Glieder in beyden, welche einerley Nenner haben, zusammengenommen werden, so wird sich die Summe der beyden vereinigten

*) *Landen* (in den Mathematical Memoirs, London 1780. N. IV. of the sums of series) hat einige Fälle des gegenwärtigen Problems entwickelt, durch ein anderes Verfahren, was schon für diese ziemlich verwickelt wird, und nicht wohl eine allgemeine Uebersicht geben kann.

Reihen, aus dem vorhergehenden, bestimmen lassen, wenn a und b so gewählt werden, daß cos. $(b\,n + a)\,\varphi$ + cos. $(b\,n - b\,\alpha + a)\,\varphi$ gleich werde m. cos. $n\,\psi$. Die Summe der Cosinusse ist bekanntlich

$$= 2 \cos. \left(b\,n + a - \frac{b\,\alpha}{2}\right)\varphi \,.\, \cos. \frac{b\,\alpha}{2}\,\varphi;$$

jene Bedingung findet also statt, wenn $a = \frac{b\,\alpha}{2}$ ist. Für diesen Werth von α ist auch die Summe der beyden andern, aus den einfachen Brüchen gebildeten Reihen, auf ähnliche Weise zusammengenommen, bekannt: wie man leicht sieht, wenn man die Differenz der Cosinusse durch ein Product aus Sinussen darstellt. Dabey wird die in (II. 2.) erwiesene Summation: $\Sigma\, \frac{\sin.\, n\,\varphi}{n} = \frac{\pi - \varphi}{2}$ zum Grunde gelegt. — Kommen drey quadratische Faktoren im Nenner vor, so läßt sich die Summe angeben, wenn $\beta = 2\,\alpha$, und $a = \frac{b\,\beta}{2}$ ist. Das Verfahren stimmt mit dem nur entwickelten überein, mit dem Unterschiede, daß hier drey Cosinusse mit ihren aus dem vorhergehenden leicht zu bestimmenden Coefficienten in ein Product gebracht werden müssen, dessen einer Factor n nicht enthält, der andere aber = cos. $f\,n\,\varphi$ ist, wo f eine Constante bedeutet. Reihen von mehr Factoren im Nenner des allgemeinen Glieds, mit abwechselnden Zeichen, auch wo statt des ersten Factors n, $2\,n - 1$ überhaupt $g\,.\,n \pm h$ vorkommt, werden nach eben den Grundsätzen behandelt. Ich muß mich hier begnügen, die Gründe des Verfahrens im allgemeinen dargestellt zu

haben, da die Entwicklung der einzelnen Fälle für gegenwärtige Schrift zu weitläuftig seyn würde.

XIV. Uebergang zu der nächstfolgenden Untersuchung.

1) Der Gang der bisherigen Anwendungen von gegenwärtiger Methode war dieser. Durch Auflösung der Cosinusse und Sinusse in ihre unendliche Progressionen, wurden die Reihen, von deren Summen die Rede war, in andere verwandelt, welche nach Potenzen des Bogens φ fortgehen. Die Coefficienten-Reihen dieser Potenzen waren so beschaffen, daß ihre Summen für höhere Exponenten verschwinden, oder, mit den Potenzen selbst, andere bekannte Reihen bilden. Dort erhält man sogleich einen endlichen Ausdruck, hier eine Reduction des Gesuchten auf etwas bekanntes. Der letzte Fall kann umgekehrt betrachtet werden: man kann nemlich Reihen, von deren Summen man aus andern Gründen unterrichtet ist, durch dieses Verfahren in gleichgültige verwandeln, um diese dadurch zu summiren. Eben das läßt sich nicht nur bey Cosinussen und Sinussen, sondern auch bey andern Größen anbringen, welche auf ähnliche Weise, als jene, in unendlichen Reihen-Ausdrücken können dargestellt werden, z. B. bey Tangenten, Exponentialgrößen, Logarithmen u. s. w.

2) Diesen Gedanken, in Rücksicht auf Reihen von Cosinussen und Sinussen, im allgemeinen zu erläutern, setze ich voraus, was nachher genauer soll erwiesen werden, daß $\Sigma \pm N . \cos. n\varphi$ und $\Sigma \pm N . \sin. n\varphi$ immer durch einen endlichen Ausdruck können angegeben

werden, wenn N eine ganze Function von n ist. Durch die nur erwähnte Verwandlung erhält man statt dieser Reihen andere, welche nach Potenzen von φ fortgehen, deren Coefficienten von der Form: $\Sigma \pm \mathfrak{N}$ sind. Man kann dieses noch so erweitern, daß in das allgemeine Glied die n^{te} Potenz einer willkürlichen Größe x komme: auch unter dieser umfassenderen Gestalt lassen sich die Summen der Reihen angeben, und es kommt bey jener Verwandlung nur darauf an, $\Sigma \pm x^n \mathfrak{N}$ gehörig zu bestimmen.

3) Im vorhergehenden wurden diese zween Sätze zum Grunde gelegt: $\Sigma \pm n^{2m} = 0$; $\Sigma \pm (2n-1)^{2m-1} = 0$. Die erste Summation lehrt **Euler**, auch daß für für ungerade Exponenten $\Sigma \pm n^{2m-1}$ gleich sey $\pm \frac{2^{2m}-1}{2m} . \mathfrak{A}^M$ *), wovon in (XII. 5.) ist Gebrauch gemacht worden. Die Art zu schließen, deren er sich dabey bedient, bezweifelt einer der einsichtsvollsten neuern Analysten, **Greg. Fontana**. Dieser wählt daher einen andern Weg, $\Sigma \pm n^r$ für jedes ganze r zu finden: auf welchem aber, wie es mir vorkommt, die Untersuchung nicht so vollendet wird, als zu wünschen wäre, und zu gegenwärtigem Zwecke erforderlich ist **).

Es

*) Instit. Calc. Diff. P. II. Cap. VII. p. 501.

**) Fontana sucht $\Sigma \pm x^n . n^r$ durch fortgesetzte Differentiationen der Reihe $1 - x + x^2 -$ &c., wobey die Reihe immer wieder mit x multiplicirt werden muß (so verfährt Euler I. (D. P. II. p. 305.) bey einer ähnlichen Veranlassung). Dann wird $x = 1$ gesetzt. Da aber das Gesetz des Fortschritts dieser allgemeineren Summen nicht angegeben ist, auch zu verwickelt seyn möchte, als daß es durch bloße Differentiation könnte gefunden werden, so scheint mir dieser Beweis nicht völlig genugthuend. Der andere Beweis gründet sich auf fortgesetzte Dif-

Es wird daher nicht überflüßig seyn, aus zuverläßigen und genuinen Gründen allgemeine Betrachtungen über Summen solcher Reihen anzustellen (aus welchen auch jene Sätze als Folgerungen fließen), und ihren Zusammenhang mit den **Bernoullischen Zahlen** *) darzulegen, durch welche bekanntlich Summen endlicher Reihen von eben der Art ausgedrückt werden. Darauf muß, aus den angezeigten Gründen, eine andere Untersuchung folgen, über dieselben Reihen, mit Cosinussen und Sinussen vielfacher Bögen, auch mit Potenzen von x verbunden.

XV. Allgemeiner Ausdruck für $\Sigma \pm x^n N$, insbesondere auch wenn $x = 1$ ist.

1) Da N eine ganze Function von n ist, so werden die Coefficienten der Potenzen von x in der hier zu unter-

ferentiation der Reihe, deren allgemeines Glied $\pm$ cos. $n\phi$ oder $\pm$ sin. $n\phi$ ist; wodurch er den Fall $r = 1$ des in (IX 3.) gefundenen Satzes erweist. So ist für gerade r die Aufgabe gehörig aufgelöst; aber für ungerade r erhält man keinen allgemeinen Ausdruck, und kommt also auf diesem Wege nicht einmal so weit, als Euler gewissermaßen von seinem errathenden Scharfsinne geleitet wurde. (P. *Gregor Fontana*, sopra le serie: Memorie di Verona 1784. Tom. II. P. I. p. 422.)

*) Jacob Bernoulli (Ars Conject. P. II. p. 97.) hat zuerst diese Zahlen, bey der Summirung der Potestäten natürlicher Zahlen gebraucht: aber nur die zehen ersten angegeben, auch das allgemeine Gesetz ihres Fortgangs nicht bestimmt. Dieß hat *Moivre* zuerst bemerkt (Miscell. Analyt. Suppl. p. 9): und Euler einfacher, auch zur wirklichen Berechnung, die er selbst, bis zur dreyßigsten geführt hat, bequemer dargestellt, und gehörig erwiesen; eben derselbe hat den Zusammenhang dieser Zahlen mit den Summen der reciproken Reihen, und ihren vielfachen, ausgebreiteten Nutzen in der Analysis, besonders in der Lehre von den Reihen, gezeigt: daß sie daher mit größerem Rechte Eulers Namen führen könnten, wenn sein Ruhm und seine Verdienste eines solchen Zuwachses bedürften.

suchenden Reihe, endlich auf beständige oder verschwindende Differenzen führen. Man bezeichne diese Coefficienten alle mit dem Buchstaben a, und unterscheide sie durch den Index an der Spitze, daß der erste $= a^I$, der n^{te} oder N, das allgemeine Glied $= a^N$ werde. Dieß vorausgesetzt, ist folgende Summation bekannt:

$$\Sigma \,.\, a^N x^n = \frac{x}{1-x} \,.\, a^I + \frac{x^2}{(1-x)^2} \,.\, \Delta \,.\, a^I$$
$$+ \frac{x^3}{(1-x)^3} \Delta^2 \,.\, a^I + \&c. \ldots\ldots$$

Setzt man hier vor x, $-x$, so erhält man $\Sigma \pm a^N x^n$. Es kommt also nur darauf an, jenen endlichen Ausdruck in einen andern zu verwandeln, der zu gegenwärtiger Untersuchung dienlicher ist, besonders für $x = 1$, die Summe durch die Bernoullischen Zahlen darstellt. Dazu führen folgende Bemerkungen:

2) Für die Summe der endlichen Reihe:
$a^I x + a^{II} x^2 + a^{III} x^3 + \ldots\ldots + a^N x^n = S.\, a^N x^n$ hat Euler folgenden Ausdruck erwiesen *): $S\, a^N x^n$

$$= \frac{x^{n+1}}{x-1}\left(a^N - \alpha \,.\, \frac{d\,a^N}{dn} + \beta \,.\, \frac{d^2\, a^N}{dn^2} - \gamma \,.\, \frac{d^2\, a^N}{dn^3} + \&c.\right)$$

$+ C$. Die Coefficienten α, β, γ u. s. w. werden durch x bestimmt, in ihnen kommt n nicht vor: sie sind in Rücksicht auf diese veränderliche Größe als beständige anzusehen. Die Constans C, sagt Euler, müsse so bestimmt werden, daß die Summe für $n = 0$ verschwinde, wie begreiflich ist. Durch nachfolgendes Verfahren erhält man

*) J. C. D. P. II. Cap. VII. p. 483. Die Buchstaben sind so verändert, daß die dortigen p, x, Z; hier x, n, a^N heißen.

eben diesen Ausdruck für $S.a^N x^n$, mit dem Unterschiede, daß sich zugleich ein allgemeiner Ausdruck für die Constante ergibt, woraus dann, wie sogleich erhellen wird, die Auflösung des Problems folgt, von welchem hier die Rede ist.

3) Die endliche Reihe in (2), deren letztes Glied $a^N x^n$ ist, kann als der Unterschied zwoer unendlichen Reihen angesehen werden, deren eine die in (1) angegebene ist, die andere wird $= a^N x^n + a^{N+I} x^{n+1} + a^{N+II} x^{n+2} + \&c. \ldots$; zu diesem Unterschiede muß noch $a^N x^n$ beygefügt werden. Die zwote Reihe ist von eben der Art als die erste, (ihre Coefficienten führen auch auf verschwindende Differenzen), und ihre Summe läßt sich demnach auf ähnliche Weise ausdrücken. Diese ist nemlich =

$$= x^{n-1} \left(\frac{x}{1-x} \cdot a^N + \frac{x^2}{(1-x)^2} \cdot \Delta a^N + \frac{x^3}{(1-x)^3} \cdot \Delta^2 a^N + \&c. \right)$$

Dieser Ausdruck von dem in (2) abgezogen, und dazu $a^N x^n$ addirt, gibt $S.a^N x^n$. Nun lassen sich die endlichen Differenzen von jeder Ordnung durch die verschwindende, d. i. durch Differential-Verhältnisse ausdrücke. So ist:

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} + \frac{d^2 y}{1.2.dx^2} + \frac{d^3 y}{1.2.3.dx^3} + \ldots$$

$$\Delta^2 y = \frac{(2^2 - 2.1) d^2 y}{1.2.dx^2} + \frac{(2^3 - 2.1) d^3 y}{1.2.3.dx^3} + \frac{(2^4 - 2.1) d^4 y}{1 \ldots 4.dx^4} + \ldots$$

Auf ähnliche Weise lassen sich die höhern endlichen Differenzen einer Function y von x darstellen *). Bey gegenwärtiger Anwendung ist $y = a^N$, $x = n$. Diese Werthe nun substituirt geben für $S \,.\, a^N x^n$ einen Ausdruck von folgender Gestalt: (wenn man nemlich die Größen, welche zu einerley Differential von a^N gehören, zusammennimmt, und als Coefficienten desselben betrachtet, auch den allen gemeinschaftlichen Factor $\frac{x^{n+1}}{x-1}$ besonders bemerkt)

$$S \,.\, a^N x^n = \frac{x}{1-x} \,.\, a^I + \frac{x^2}{(1-x)^2} \,.\, \Delta\, a^I + \frac{x^3}{(1-x)^3} \,.\, \Delta^2 a^I + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{x^{n+1}}{x-1} \left\{ a^N - \alpha^I \,.\, \frac{d\, a^N}{d\, n} + \alpha^{II} \frac{d^2 a^N}{d\, n^2} - \alpha^{III} \frac{d^3 a^N}{d\, n^3} + \ldots\ldots \right\}$$

Die Coefficienten α^I, α^{II}, α^{III} ... ergeben sich durch nachstehende Gleichungen:

$$\alpha^I = \frac{1}{x-1}; \quad \alpha^{II} = \frac{x+1}{1\,.\,2\,(x-1)^2};$$

$$\alpha^{III} = \frac{x^2 + 4x + 1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,(x-1)^3} \text{ u. s. w.}$$

Einen allgemeinen Ausdruck könnte man leicht angeben, weil ein solcher für die endlichen Differenzen bekannt ist. Man wird aber schon bey diesen drey ersten Coefficienten

*) *Euler.* Inst. C. D. Cap. III. De inventione differentiarum finitarum. p. 340.

bemerken, daß sie mit denen einerley sind, welche **Euler** mit den Buchstaben α, β, γ u. s. w. bezeichnet *): er hat auch das Gesetz ihres Fortgangs in gehöriger Allgemeinheit einfach dargestellt. — So ist mithin der hier gefundene Ausdruck der Summe dem **Eulerischen** gleichgültig, bis auf die erste zusammengesetzte Größe, in welcher n gar nicht vorkommt: diese muß demnach der erwähnten Constante gleich seyn; oder man hat C (in 2)

$$= \frac{x}{1-x} \cdot a^I + \frac{x^2}{(1-x)^2} \Delta \cdot a^I + \frac{x^3}{(1-x)^3} \cdot \Delta^2 a^I + ..$$

4) Verbunden mit (1) gibt dieser Satz den andern: $C = \Sigma\, a^N x^n$, oder die Summe der **unendlichen** Reihe, deren allgemeines Glied $a^N x^n$ ist, wird $= C$. Setzt man also in dem Ausdrucke der Summe in (2) $n = 0$, so muß seyn: $\Sigma\, a^N x^n =$

$$- \frac{x}{x-1}\left(a^N - \alpha^I \frac{d\, a^N}{d\, n} + \alpha^{II} \frac{d^2\, a^N}{d\, n^2} - \ldots\right)$$

Auf diese Weise hat man für die gesuchte Summe einen allgemeinen Ausdruck, welcher Particular-Werthe der Differential-Verhältnisse von a^N für $n = 0$ enthält, und noch die Coefficienten α^I, α^{II}, α^{III} u. s. w. deren allgemeines Gesetz bekannt ist. Dieses Gesetz nemlich ist nach **Eulern** folgendes **):

*) l. c. p. 486. Der allgemeine Ausdruck, den Euler hier gibt, verglichen mit dem, was von den Differenzen bekannt ist, zeigt die Allgemeinheit der behaupteten Identität.

**) l. c. p. 484; p. 488 ist das Gesetz anders, zur Berechnung bequemer, aber nicht so leicht für die Uebersicht, ausgedrückt.

$$\alpha^{I} = \frac{1}{x-1},$$

$$\alpha^{II} = \frac{1}{x-1}\left(\alpha^{I} + \frac{1}{2}\right).$$

$$\alpha^{III} = \frac{1}{x-1}\left(\alpha^{II} + \frac{\alpha^{I}}{2} + \frac{1}{1.2.3}\right)$$

$$\alpha^{IV} = \frac{1}{x-1}\left(\alpha^{III} + \frac{\alpha^{II}}{2} + \frac{\alpha^{I}}{1.2.3} + \frac{1}{1..4}\right)$$

&c. . . . .

5) Setzt man hier $x = -1$, so ergibt sich daraus $\Sigma \pm a^{N}$. Für diesen Fall ist *) $\alpha^{2M} = 0$: d. i. alle Coefficienten, welche zu geraden Differentialen gehören, verschwinden: für die, welche zu den ungeraden gehören, ist $\alpha^{2M-1} = \mp \frac{A^{M}}{1.2.3...2m}$, wo $A^{M} = 2.(2^{2m}-1).\mathfrak{A}^{M}$; (das obere Zeichen gilt für ein ungerades m, das untere für ein gerades; $\mathfrak{A}^{M}$ bedeutet die m^{te} Bernoullische Zahl). Demnach entsteht

$$\Sigma \pm a^{N} = \frac{a^{N}}{2} + \frac{(2^{2}-1)}{1.2}\mathfrak{A}^{I}\frac{d\,a^{N}}{dn}$$

$$- \frac{(2^{4}-1)}{1..4}\mathfrak{A}^{II}\frac{d^{2}a^{N}}{dn^{2}} + \&c....$$

In den Differential-Verhältnissen muß erwähntermaßen $n = 0$ gesetzt werden. Dieser Ausdruck zeigt im allgemeinen den Zusammenhang der Summe mit den Bernoullischen Zahlen.

*) l. c. p. 494.

6) Nun sey $a^N = n^r$, so verschwindet diese Grösse für $n = 0$, nebst allen ihren Differential-Verhältnissen bis auf das r^{te}, dieses ist nemlich $= \frac{d^r n^r}{d n^r} = r(r-1)\ldots 1$; die folgenden verschwinden für jedes n. Ist also r gerade, so wird $\Sigma \pm n^r = 0$, weil in dem Ausdrucke der Summe keine ungeraden Differentiale vorkommen, oder ihre Coefficienten verschwinden. Ist aber r ungerade $= 2m - 1$, so wird

$$\Sigma \pm n^{2m-1} = \pm \frac{2^{2m}-1}{1\ldots 2m} \cdot \mathfrak{A}^M \cdot 1 \cdot 2 \ldots 2m - 1$$

$$= \pm \mathfrak{A}^M \frac{(2^{2m}-1)}{2m}$$

Für ein ungerades m gilt das obere, für ein gerades das untere Zeichen. Noch allgemeiner ist, wenn die Potenzen der natürlichen Zahlen in fortschreitende Potenzen einer willkürlichen Grösse x^1 multiplicirt sind, $\Sigma x^n n^r = \ldots \pm \frac{x}{1-x} \cdot \alpha^R \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r$, wo α^R aus (4) bestimmt werden kann. — Auf ähnliche Weise erhält man die Summen der Potenzen der ungeraden Zahlen.

7) Dem allgemeinen Ausdruck für $\Sigma a^N x^n$ kann man noch folgende Gestalt geben, welche ich hier beyfüge, weil sie auffallend und leicht zu übersehen ist. Die Particularwerthe der Differentialverhältnisse in (3) lassen sich so darstellen, daß nicht mehr auf $n = 0$ Rücksicht genommen werden darf. Es ist nemlich $a^N = z$, für $n = 0$, $= z - n\frac{dz}{dn} + \frac{n^2}{1 \cdot 2}\frac{d^2 z}{dn^2} - \&c.$; eben so

erhält man Ausdrücke für $\frac{d z}{d n}$, $\frac{d^2 z}{d n^2}$ u. s. w. zu $n = 0$.

Nimmt man was zu einerley Differential von z gehört zusammen, und bezeichnet diese Coefficienten wie N^I, N^{II}, und so weiter, so wird: $\Sigma\, a^N x^n =$

$$= \frac{x}{1-x} \left\{ \begin{matrix} z - \frac{d z}{d n} \cdot N^I + \frac{d^2 z}{d n^2} \cdot N^{II} \\ - \frac{d^3 z}{d n^3} \cdot N^{III} + \&c. \end{matrix} \right\}$$

Die Coefficienten ergeben sich folgendergestalt:

$$N^I = n + \alpha^I;\ N^{II} = \frac{n^2}{1 \cdot 2} + n\,\alpha^I + \alpha^{II};\ \text{u. s. w.}$$

Man kann sie bequemer so darstellen: N^I ist $= \int d\,n$, das Integral so genommen, daß es, für $n = 0$, $= \alpha^I$ werde; $N^{II} = \int d\,n \int d\,n$, welches doppelte Integral, für $n = 0$, $= \alpha^{II}$ werden muß. Allgemein heiße in einer Reihe von Integralen, deren jedes alle vorhergehenden unter sich begreift, das erste, das einfache; das zweyte, das doppelte . . . . . das m^{te}, das $m$fache; so wird $N^M = \int d\,n \int d\,n \int d\,n \int d\,n \ldots \int d\,n$, wenn jedes $q$fache Integral so genommen wird, daß es, für $n = 0$, $= \alpha^Q$ werde; q stellt hier alle Zahlen von 1 bis m vor. Dieser Vorstellungsart gemäß wird also:

$$\Sigma\, x^n z = \frac{x}{1-x} \left\{ \begin{matrix} z - \frac{d z}{d n} \int d\,n + \frac{d^2 z}{d n^2} \int d\,n \int d\,n \\ - \frac{d^3 z}{d n^3} \int d n \int d n \int d n + \&c. \end{matrix} \right\}$$

In diesem Ausdrucke wird n als veränderlich angesehen,

und kann also willkührlich genommen werden: und doch darf es nach der Entwicklung nicht mehr vorkommen. Man wird sich diese anscheinende Schwürigkeit leicht heben, wenn man das Differential der in $\frac{x}{1-x}$ multiplicirten Größe untersucht und $=0$ findet: daß also dieselbe in Absicht auf n eine Constante ist, für jedes n einen Werth behält, d. i. n bey der Entwicklung wegfällt. — Dieser Ausdruck dient unter andern auch als ein sonderbares Beyspiel der analytischen Charakteristik: er enthält den Zusammenhang der Summe mit den Coefficienten α^{I}, α^{II} u. s. w., oder, für $x=-1$, mit den Bernoullischen Zahlen: und diese sind darin unsichtbar; dagegen stellt er die Summe durch n und Größen, die n enthalten, dar: und doch ist dieselbe von n unabhängig.

XVI. Allgemeiner Ausdruck für Summen von Reihen der Sinusse und Cosinusse vielfacher Bögen, verbunden mit geometrischen, allgebraischen und recurrirenden Reihen.

1) In dem allgemeinen Gliede der Reihen, deren Summen hier untersucht werden, befindet sich der Cosinus oder Sinus eines vielfachen von dem Bogen φ nach der n^{ten} natürlichen Zahl, eine Potenz der willkürlichen Größe x mit eben dieser Zahl als Exponenten, und dann irgend eine ganze algebraische Function von n. Bekanntlich stellt diese für sich allein das allgemeine Glied einer algebraischen Reihe, von jedweder endlichen Ordnung, vor, und jene Potenz eben das bey einer geometrischen Reihe.

Man drücke, wie vorhin, die Coefficienten durch a^{I}, a^{II} u. s. w., den n^{ten} durch a^{N} aus, so wird das Problem dieses seyn, $\Sigma\, x^n\, a^N$ cos. $n\,\phi$ zu finden. Die einfachste Art, Reihen dieser Art zu summiren, beruhet auf den imaginären Ausdrückungen der trigonometrischen Linien durch Exponentialgrößen. Man setze also hier

$$\text{cos. } n\,\phi = \frac{e^{n\phi\sqrt{-1}} + e^{-n\phi\sqrt{-1}}}{2}, \text{ so wird}$$

$$\Sigma\, x^n\, a^N \text{ cos. } n\,\phi = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(x\,e^{\phi\sqrt{-1}})^n \,.\, a^N + \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(x\,e^{-\phi\sqrt{-1}})^n\, a^N,$$

oder die gesuchte Summe aus den Summen zwoer Reihen zusammengesetzt, denen in (XIV. 2.) ähnlich: bey der einen ist $x\,e^{\phi\sqrt{-1}}$, bey der andern $x\,e^{-\phi\sqrt{-1}}$, was dort x allein ist. Jenen Ausdruck für die Summe hier angewandt, erhält man

also: $$2\,\Sigma\, x^n\, a^N \text{ cos. } n\,\phi = a^I \,.\, \frac{x\,e^{\phi\sqrt{-1}}}{1 - x\,e^{\phi\sqrt{-1}}} + \frac{x^2\,e^{2\phi\sqrt{-1}}}{(1 - x\,e^{\phi\sqrt{-1}})^2} \,.\, \Delta^2\, a^I + \&c.$$

$$+ a^I \,.\, \frac{x\,e^{-\phi\sqrt{-1}}}{1 - x\,e^{-\phi\sqrt{-1}}} + \frac{x^2\,e^{-2\phi\sqrt{-1}}}{(1 - x\,e^{-\phi\sqrt{-1}})^2} \,.\, \Delta^2\, a^I$$

+ &c. Von diesen beiden Partial-Ausdrückungen ist jede für sich unmöglich; zusammen geben sie eine mögliche Summe: es kommt dabey nur darauf an, sie auf die bequemste Gestalt zu bringen, daß sich das unmögliche aufhebe. Die unmöglichen Brüche, welche beiderseits zu einer Potenz von x ($= x^m$) und einer Differenz von a^I gehören, oder $\frac{e^{m\phi\sqrt{-1}}}{(1 - x\,e^{\phi\sqrt{-1}})^m}$, und $\frac{e^{-m\phi\sqrt{-1}}}{(1 - x\,e^{-\phi\sqrt{-1}})^m}$, haben, auf einerley Benennung gebracht, einen möglichen

Nenner. Die Entwickelung der m^{ten} Potenz der Partialnenner gibt auch dem Zähler eine mögliche Gestalt. Dieses Verfahren ist das natürlichste, aber durch folgendes erhält man einen viel einfachern Ausdruck. Jene beiden Brüche lassen sich so vorstellen: $(e^{-\phi\sqrt{-1}} - x)^{-m}$, $(e^{\phi\sqrt{-1}} - x)^{-m}$: für ihre Summe unter dieser Gestalt einen möglichen Ausdruck zu finden, dazu dient nachstehender Lehnsatz.

2) Jede unmögliche Größe läßt sich durch $A + B.\sqrt{-1}$ ausdrücken: also wird auch $(a + b.\sqrt{-1})^r = A + B.\sqrt{-1}$ seyn müssen. Es fragt sich, was A und B für Werthe haben. Jene Potenz ist

$= a^r\left(1 + \frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^r$. Nun wird für jeden Bogen ζ, $(\text{cos.}\,\zeta + \text{s.}\,\zeta.\sqrt{-1})^r = \text{cos.}\,\zeta^r(1 + \text{s.}\,\zeta.\sqrt{-1})^r$ $= \text{cos.}\,r\,\zeta + \text{sin.}\,r\,\zeta.\sqrt{-1}$. Man setze also $\frac{b}{a}$ $= \text{tang.}\,\zeta$, so folgt

$$(a + b\sqrt{-1})^r = a^r\,\frac{(\text{cos.}\,r\,\zeta + \text{sin.}\,r\,\zeta.\sqrt{-1})}{\text{cos.}\,\zeta^r};$$

aber $\text{cos.}\,\zeta = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$, also $(a + b\sqrt{-1})^r$ $= (a^2 + b^2)^{\frac{r}{2}}.(\text{cos.}\,r\,\zeta + \text{sin.}\,r\,\zeta.\sqrt{-1})$, wo $\zeta = \text{Arc. t.}\,\frac{b}{a}$.

3) In der Anwendung auf die Größen in (1) ist beyderseits $a = \text{cos.}\,\phi - x$; b, bey der einen, $= +\text{sin.}\,\phi$, bey der andern $= -\text{sin.}\,\phi$. Also wird sich, was in

$\sqrt{-1}$ multiplicirt ist, gegenseitig aufheben, und seyn:
$(e^{-\phi\sqrt{-1}} - x)^{-m} + (e^{\phi\sqrt{-1}} - x)^{-m}$
$= 2\,(1 - 2\,x \,.\, \text{cos.}\,\phi + x^2)^{-\frac{m}{2}} \,.\, \text{cos.}\, m\,\zeta$
wo der Bogen $\zeta = \text{Arc. tang.}\ \frac{\text{sin.}\,\phi}{x - \text{cos.}\,\phi}$ ist. Diesen Werth für $m = 1, 2, 3$ u. s. w. substituirt, erhält man
$\Sigma\, x^n a^N \text{cos.}\, n\,\phi = a^{\text{I}} \,.\, z\, \text{cos.}\, \zeta + \Delta\, a^{\text{I}} \,.\, z^2\, \text{cos.}\, 2\,\zeta$
$+ \Delta^2\, a^{\text{I}}\, z^3\, \text{cos.}\, 3\,\zeta +$ &c., wenn der Kürze wegen
$z = \frac{x}{\sqrt{(1 - 2\,x\,\text{cos.}\,\phi + x^2)}}$ gesetzt wird. Man kann ϕ durch ζ ausdrücken, und so ergibt sich folgende Summe, bey welcher das Gesetz des Fortschritts noch leichter zu übersehen ist. Man setze nemlich $\frac{x \,.\, \text{sin.}\,\zeta}{\text{sin.}\,\phi} = y$, so wird
$\Sigma\, x^n a^N \text{cos.}\, n\,\phi = - a^{\text{I}}\, y\, \text{cos.}\,\zeta + \Delta\, a^{\text{I}}\, y^2\, \text{cos.}\, 2\,\zeta$
$- \Delta^2\, a^{\text{I}}\, y^3\, \text{cos.}\, 3\,\zeta +$ &c. Der bisher gebrauchten Bezeichnungsart gemäß kann man diese Summation auch so darstellen: $\Sigma\, x^n\, a^N\, \text{cos.}\, n\,\phi = \text{S} \mp \Delta^n\, a^{\text{I}} \,.\, y^n\, \text{cos.}\, n\,\zeta$, wo die letzte durch S angedeutete endliche Summe von $n = 1$ bis $n = q$ genommen wird, wenn die Function a^N von der Dimension $= q$ ist, daß also die Differenzen von einer höhern Ordnung, als q anzeigt, verschwinden.

4) Man wird leicht bemerken, daß sich das ganze seitherige Verfahren auch dann anbringen lasse, wenn die Bögen, anstatt vielfache nach den natürlichen Zahlen zu seyn, nach irgend einer andern arithmetischen Reihe fortgehen. Der n^{te} Bogen in der Reihe sey $= \phi + n\,\delta$, so findet sich

$\Sigma\, a^N x^n \cos. (\phi + n\,\delta) = - a^{\mathrm{I}}.y.\cos.(\zeta - \phi)$
$+ \Delta\, a^{\mathrm{I}}.y^2 \cos.(2\,\zeta - \phi) - \Delta^2 a^{\mathrm{I}} y^3 \cos.(3\,\zeta - \phi)$
$+$ &c., wo y und z die vorigen Werthe behalten, nemlich $\zeta = \text{Arc. t.} \dfrac{\sin.\,\delta}{x - \cos.\,\delta}$, $y = \dfrac{x \sin.\,\zeta}{\sin.\,\delta}$. Daraus ergibt sich auch die Summation eben derselben Reihe bis auf ein jedwedes n^{tes} Glied. Diese endliche Reihe kann nemlich als der Unterschied zwoer unendlichen von einer Art angesehen werden. Der abzuziehenden Reihe Summe erhält man, wenn in dem nur dargelegten Ausdrucke vor a^{I}, $a^{N+\mathrm{I}}$, und statt ϕ, $\phi + n\,\delta$ gesetzt wird: ζ und δ bleiben unverändert.

5) Aehnliche Reihen von Sinussen lassen sich durch eben diese Methode summiren. Man kann auch ihre Summation unmittelbar aus der nächstvorhergehenden ableiten, wenn statt des Winkels ϕ, sein Complement, und δ negativ genommen wird. Daraus folgt $\Sigma\, a^N x^n \text{ f.} (\phi + n\,\delta)$
$= - a^{\mathrm{I}}.y \sin.(\zeta - \phi) + \Delta\, a^{\mathrm{I}}.y^2 \sin.(2\,\zeta - \phi)$
$- \Delta^2\, a^{\mathrm{I}} y^3 \sin.(3\,\zeta - \phi) +$ &c. welcher Ausdruck mit dem in (4) in allem übereinkommt, außer daß von den Bögen $\zeta - \phi$, $2\,\zeta - \phi$ u. s. w. hier die Sinusse genommen sind, dort die Cosinusse: y und ζ haben beyderseits gleiche Werthe.

6) Nimmt man in den bisherigen Formeln x negativ, so entstehen daraus die Summen eben solcher Reihen mit abwechselnden Zeichen. Es sey $\mathfrak{D} = \text{Art. t.} \dfrac{\sin.\,\delta}{x + \cos.\,\delta}$, $y = \dfrac{x.\sin.\,\mathfrak{D}}{\sin.\,\delta}$, so wird $\Sigma \pm a^N x^n \cos.(\phi + n\,\delta)$

$= a^I y \,.\, \text{cos.} (\mathfrak{D} + \varphi) - \Delta a^I . y^2 \text{cos.} (2 \mathfrak{D} + \varphi)$ $+ \Delta^2 a^I . y^3 \text{ cos.} (3 \mathfrak{D} + \varphi) -$ &c. Eben so für die Reihe mit Sinussen $\Sigma \pm a^N x^n \text{ sin.} (\varphi + n \delta)$ $= a^I y \,.\, \text{sin.} (\mathfrak{D} + \varphi) - \Delta a^I . y^2 . \text{sin.} (2 \mathfrak{D} + \varphi)$ $+ \Delta^2 a^I y^3 \text{ sin.} (3 \mathfrak{D} + \varphi) -$ &c.

7) Für den Fall $x = 1$ wird in (4) und (5) $\text{tang.}\, \zeta = \frac{\text{sin.}\, \delta}{1 - \text{cos.}\, \delta}$, also $\zeta = \frac{\pi - \delta}{2}$, und $y = \frac{1}{2} . \text{ cosec.} \frac{\delta}{2}$. Daraus folgt $\Sigma a^N . \text{cos.} (\varphi + n\delta)$ $= - a^I y \,.\, \text{sin.} \left(\frac{\delta}{2} + \varphi\right) - \Delta a^I y^2 . \text{cos.} (\delta + \varphi)$ $+ \Delta^2 a^I y^3 . \text{sin.} (\tfrac{3}{2} \delta + \varphi) + \Delta^3 a^I y^4 \text{ cos.} (2 \delta + \varphi)$ $-$ &c., in welchem Ausdrucke wechselsweise Sinusse und Cosinusse von Bögen vorkommen, welche zum beständigen Unterschiede $\frac{\delta}{2}$ haben, und deren erster $\frac{\delta}{2} + \varphi$ ist. Wie die Zeichen abwechseln ist sichtbar. Für die Summe der Reihe mit Sinussen erhält man einen ähnlichen Ausdruck, oder vielmehr völlig denselben, wenn man bey den nur erwähnten Bogen Sinusse und Cosinusse verwechselt. — Setzt man in (6) $x = 1$, so wird $\mathfrak{D} = \frac{\delta}{2}$, $y = \frac{1}{2} \text{ sec.} \frac{\delta}{2}$: also $\Sigma \pm a^N \text{ cos.} (\varphi + n \delta)$ $= a^I y \,.\, \text{cos.} \left(\frac{\delta}{2} + \varphi\right) - \Delta a^I . y^2 \text{ cos.} (\delta + \varphi)$ $+ \Delta^2 a^I y^3 \text{ cos.} (\tfrac{3}{2} \delta + \varphi) -$ &c. Wegen der Reihe von Sinussen gilt die gleiche Bemerkung. — Wie ferner

daraus die Summen eben solcher endlichen Reihen gefunden werden, bedarf keiner weitern Entwicklung (4).

8) Anstatt daß seither in der Reihe, deren allgemeines Glied $a^N x^n \cos. n\,\varphi$ ist, die Coefficienten a^I, a^{II}, a^{III} u. s. w. nach einer algebraischen Progression fortgiengen, nehme man für dieselben, Glieder einer **recurrirenden Reihe**, von irgend einer Ordnung m: die **Verhältniß-Skale** werde durch folgende Gleichung ausgedrückt: $\alpha \cdot a^N + \alpha^I \cdot a^{N-I} + \alpha^{II} \cdot a^{N-II} \ldots + \alpha^M \cdot a^{N-M} = 0$, (wobey a^N das n^{te} Glied der Coefficientenreihe bedeutet): Man setze, der Kürze wegen, den Ausdruck $\alpha + \alpha^I x \cos. \varphi + \ldots\ldots + \alpha^M x^m \cos. m\,\varphi = P$; mit $\sin. \varphi$, $\sin. 2\,\varphi$, $\sin. 3\,\varphi$ &c. mutiplicirt gebe er Π^I, Π^{II}, Π^{III}; $\frac{d\,P}{d\,\varphi}$, $\frac{d\,\Pi^I}{d\,\varphi}$, $\frac{d\,\Pi^{II}}{d\,\varphi}$ u. s. w. bedeuten die Differential-Verhältnisse dieser Grössen, bloß φ als veränderlich angenommen. Dieses vorausgesetzt, wird die Summe der Reihe, oder $\Sigma\, a^N x^n \cos. n\,\varphi$, einem Bruche gleich, dessen Nenner $= P^2 + \frac{d\,P^2}{d\,\varphi^2}$ ist, der Zähler ist

$$= \alpha \cdot a^I \cdot x \frac{d\,\Pi^I}{d\,\varphi} + (\alpha \cdot a^{II} + \alpha^I \cdot a^I)\, x^2 \frac{d\,\Pi^{II}}{d\,\varphi}$$

$$+ (\alpha\, a^{III} + \alpha^I\, a^{II} + \alpha^{II}\, a^I)\, x^3 \frac{d\,\Pi^{III}}{d\,\varphi} + \&c.$$

Das Gesetz des Fortgangs bey diesem Ausdrucke ist auffallend: er hört mit dem m^{ten} Gliede auf, welches $=$ ist

$$(\alpha\, a^M + \alpha^I a^{M-I} \ldots + \alpha^{M-I} a^I)\, x^m \frac{d\,\Pi^M}{d\,\varphi}.$$

Auf ähnliche Weise findet man die Summe der Reihe, in welcher Sinusse vorkommen. Auch können die Bögen jedwede arithmetische Progression ausmachen. — Setzt man in der nur gefundenen Formel $\varphi = 0$, so wird $\frac{d P}{d \varphi} = 0$, $\frac{d . \Pi^M}{d \varphi} = m P$: und so liegt darin die Summation der recurrirenden Reihen in ihrer allgemeinen Gestalt, wie sie auch sonst bekannt ist. Diejenige Darstelstellung allgemeiner Ausdrücke ist immer die vortheilhafteste, bey welcher man die besondern Fälle am leichtesten übersehen und entwickeln kann. So sind auch die vorhergehenden Formeln beschaffen *).

mmmmm

*) Mit der Untersuchung von Reihen mit Cosinussen und Sinussen haben sich fast zu gleicher Zeit mehrere Analysten beschäftiget: Daniel Bernoulli, Lexell (Nov. Comment. Petrop. T. XVI. XVIII), Euler (Tom. XVIII auch Introd. in Analys. Infin. P. I. Cap. XIV), Bossut (Mem. de Paris 1769); nachmals auch Lorgna (Memorie della Societa Italiana Tom. I) und Fontana (Tom. II. P. I). Formeln für die Aufgabe, in der Allgemeinheit, in welcher ich sie hier vorgetragen habe, findet man bey diesen Schriftstellern nicht entwickelt. So sucht Fontana, in der Absicht, die Untersuchungen seiner Vorgänger zu erweitern, die Summe zwoer Reihen, deren allgemeines Glied, nach der gegenwärtigen Bezeichnungsart, $(a + b n) . \cos. (a + b n) \varphi$, oder $(a + b n) \sin. (a + b n) \varphi$ ist. Auch zeigt er im allgemeinen an, wie durch fortgesetzte Differentiation die Summen gefunden werden, wenn der allgemeine Coefficient $(a + b n)^m$ ist. Man sieht leicht, daß diese Betrachtung nicht allgemein genug ist, und auch für die Fälle, welche sie umfaßt, die Formeln nicht ihre einfachste Gestalt, auf diesem Wege, erhalten würden. — Was Potenzen von Cosinussen und Sinussen betrift, so werden sie entweder nach den oben in (VI.) angegebenen Formeln behandelt, oder man legt dabey den in (VIII.) erwiesenen Satz zum Grunde, daß sie recurrirende Reihen höherer Ordnungen bilden. — Als Beyspiele dienen die schon im vorhergehenden erwiesene Summationen dieser Art.

XVII. Reihen für die Tangente und Sekante. Bemerkungen darüber; auch über $\Sigma \pm (2n-1)^r$.

1) Wenn man in den allgemeinen Formeln des vorhergehenden §. $\varphi = 0$ und $a^N = 1$ setzt, so erhält man:

$$\Sigma \pm \cos.\, n\,\delta = \tfrac{1}{2} \sec.\frac{\delta}{2} . \cos.\frac{\delta}{2} = \tfrac{1}{2}; \text{ und}$$

$$\Sigma \pm \sin.\, n\,\delta = \tfrac{1}{2} \sec.\frac{\delta}{2} . \sin.\frac{\delta}{2} = \tfrac{1}{2} \operatorname{tang.} \frac{\delta}{2}.$$

Die Anwendung des in (XIV.) überhaupt angezeigten Verfahrens auf die letztere Reihe gibt also einen Reihen-Ausdruck für die **Tangente**. Es ist nemlich $\Sigma \pm \sin.\, n\,\delta$

$$= \delta . \Sigma \pm n - \frac{\delta^3}{1.2.3} \Sigma \pm n^3 + \frac{\delta^5}{1..5} . \Sigma \pm n^4$$

— &c. Drückt man nun, nach (XV.), die hier vorkommenden Summen durch die Bernoullische Zahlen aus, so wird, $\frac{\delta}{2} = x$ gesetzt: $\operatorname{tang.} x = 2^2 \frac{(2^2-1)}{1.2} \mathfrak{A}\, x$

$$+ \frac{2^4 (2^4-1)}{1..4} \mathfrak{B}\, x^3 + \frac{2^6 (2^6-1)}{1..6} \mathfrak{C}\, x^5 + \&c.,$$

bey welcher Reihe das Gesetz des Fortgangs leicht zu übersehen ist: wie jene Zahlen, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ u. s. w. fortschreiten, ist bekannt genug. — Daraus ergibt sich für die **Cotangente** folgende Progression: $\cot.\, x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 \mathfrak{A}\, x}{1.2}$

$$- \frac{2^4 \mathfrak{B}\, x^3}{1...4} - \frac{2^6 \mathfrak{C}\, x^5}{1...6};$$ wie man durch Division

findet, oder noch bequemer, indem man die Form der Reihe annimmt, und zur Bestimmung der Coefficienten, die Gleichung: $\tan x = \cot x - 2 \cot 2x$, mit Zuziehung der nur erwiesenen Reihe für die Tangente, gebraucht.

2) Diese Reihen kommen bey den Schriftstellern über die höhere Analysis selten vollständig entwickelt vor *), weil das Gesetz der Coefficienten nicht so auffallend ist, als bey den Reihen für Cosinusse und Sinusse. Sonst läßt sich dieses Gesetz auf mehr als eine Art auch aus den ersten Gründen ableiten. So ist $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Löst man nun den Cosinus und Sinus in ihre unendliche Progressionen auf, so entsteht durch Division eine Reihe, welche bekanntlich zu den recurrirenden Reihen gehört. Ist demnach $\cot x = \frac{1}{x}(1 + a^{I}x^{2} + a^{II}x^{4} + a^{III}x^{6} + \&c.)$ so wird jeder Coefficient a^{N} durch alle vorhergehenden vermittelst folgender Gleichung bestimmt: $0 = a^{N} - \frac{a^{N-I}}{1.2.3} + \frac{a^{N-II}}{1\ldots5} - \&c. \mp \frac{a^{I}}{1\ldots.2n-1} \mp \frac{2n}{1\ldots2n+1}$. Verglichen mit dem was oben in (III. 4.) ist erwähnt worden, zeigt diese Gleichung, daß $a_{N} = -\cdot\frac{2^{2n}}{1.2.3..2n}\cdot\mathfrak{A}^{N}$ sey, wenn $\mathfrak{A}^{N}$ die n^{te} Bernoullische Zahl andeutet. — Eine andere bequeme Art, die Reihe für die Cotangente zu finden, gibt die

*) Euler hat sie (Inst. Calc. Diff. Cap. V. p. 424) aus andern Gründen abgeleitet.

Integration an die Hand. Es ist nemlich cot. $x =$
$- \int \frac{dx}{\sin. x^2} = - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - \cos. 2x}$: der in dx
multiplicirte Bruch läßt sich gleichfalls in eine recurrirende Reihe entwickeln, welche mit dx multiplicirt und gehörig integrirt $- \frac{1}{2} \cot. x$ gibt. Daraus folgt dasselbe Resultat. — Aus der Reihe für die Cotangente ergibt sich die andere für die Tangente unmittelbar, weil tang. $x = \cot. x - 2 \cot. 2x$ ist.

2) Legt man dieses Verfahren, jene Reihen zu finden, zum Grunde, so entsteht daraus vermittelst der Verwandlung in (1) ein neuer Beweis für den oben schon erwiesenen Ausdruck der Summe $\Sigma \pm n^{2m-1}$. Eben so läßt sich durch diese Art zu schließen, darthun, daß $\Sigma \pm n^{2m} = 0$ sey. Es ist nemlich (in XVI. vor φ, $-\varphi$, und vor δ, 2φ gesetzt) $\cos. \varphi - \cos. 2\varphi + \cos. 3\varphi - \cos. 4\varphi + \&c = \Sigma \pm \cos. n\varphi = \frac{1}{2}$. Daraus wird, durch Auflösung der Cosinusse in ihre Reihen, $\Sigma \pm n - \frac{\varphi^2}{1.2} \Sigma \pm n^2 + \frac{\varphi^4}{1..4} \Sigma \pm n^4 - \&c. = \frac{1}{2}$. Da diese Gleichung für jedes φ gilt, so müssen die Summen der Coefficienten-Reihen verschwinden, bis auf $\Sigma \pm n = \frac{1}{2}$. — Obgleich diese Beweisart ganz einfach ist, so schien es mir doch nicht überflüßig, im vorhergehenden, eben diese Sätze als Folgerungen aus allgemeineren Betrachtungen darzustellen. Eben diese Betrachtungen geben zwar auch Ausdrücke für
$\Sigma \pm (2n - 1)^r$, bey geraden und ungeraden r: aber es läßt sich daraus nicht ohne einige Weitläufigkeit darthun, daß im zweyten Falle die Summe jedesmal ver-

schwinde, und welchem Gesetze sie im ersten folge. Beydes zu übersehen, sind Schlüsse von der Art, wie sie hier geführt worden sind, sehr dienlich: dieß wird aus dem nachfolgenden sogleich erhellen.

4) Für die Sekante eine Reihe zu finden, verfährt man auf ähnliche Art wie in (1). Es ist nemlich

$$\text{sec.}\, \varphi = \frac{1}{\text{cos.}\, \varphi} = \frac{1}{1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1..4} - \&c.}$$

Dieser Bruch entwickelt, gibt eine recurrirende Reihe: $a + a^{\text{I}} \varphi^2 + a^{\text{II}} \varphi^4 + a^{\text{III}} \varphi^6 + \&c.$; der Nenner zeigt die Verhältniß-Skale, und daraus entsteht für die Coefficienten folgende Gleichung:

$$a^{N} - \frac{1}{1.2} a^{N-1} + \frac{1}{1.2.3.4} a^{N-\text{II}} - \frac{1}{1..6} a^{N-\text{III}}$$

$$+ \&c. \pm \frac{a}{1.2.3\ldots 2m}.$$

Dieses Gesetz verglichen mit demjenigen, welches in (X. 4) für die Summen der reciproken Reihen von Potenzen ungerader Zahlen mit abwechselnden Zeichen ist erwiesen worden, zeigt daß

$$\Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m+1}} = \frac{\pi^{2m+1}}{2^{2m+2}} \cdot a^{M}.$$

So sind also die Zahlen a, a^{I}, a^{II} &c. in Rücksicht auf diese Reihen, eben das, was die Bernoullischen Zahlen für die reciproke Reihen von Potenzen der natürlichen Zahlen, oder für $\Sigma \frac{1}{n^{2m}}$, und für die Tangenten-Reihe

sind. Man nenne für jedes q, $a^Q = \frac{\alpha Q}{1.2.3\ldots 2q}$ so erhält man neue Zahlen α, α^{I}, α^{II} u. s. w., welche **Euler** bis auf die 10te berechnet hat (Instit. Calc. Diff. C. VIII. p. 542). Diese zum Grunde gelegt wird also:

$$\sec. x = \alpha + \frac{\alpha^{I} x^2}{1.2} + \frac{\alpha^{II} x^4}{1.2.3.4} + \frac{\alpha^{III} x^6}{1\ldots 6} + \&c.$$

$$\Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m+1}} = \frac{\alpha^M}{1.2.3..2m} \cdot \frac{\pi^{2m+1}}{2^{2m+2}}.$$

5) Setzt man in dem allgemeinen Ausdrucke für $\Sigma \pm a^N \sin. (\varphi + n\delta)$ (XVI. 6.) vor φ, $-\varphi$, und statt δ, $\frac{\varphi}{2}$, so folgt daraus nachstehende Summation:

$$\sin. \varphi - \sin. 3\varphi + \sin. 5\varphi - \sin. 7\varphi + \&c. = 0.$$

Diese Reihe nach der bisherigen Art behandelt, verändert sich in diese:

$$\varphi . \Sigma \pm (2n-1) - \frac{\varphi^3}{1.2.3} . \Sigma \pm (2n-1)^3 + \frac{\varphi^5}{1..5} \Sigma \pm (2n-1)^5 - \&c.$$

Da dieser Ausdruck für jedes φ verschwinden muß, so folgt daraus: $\Sigma \pm (2n-1)^{2m-1} = 0$, ein neuer einfacher Beweis für diesen schon im vorhergehenden gefundenen Satz. — Die vorigen Werthe von δ und φ in $\Sigma \pm a^N \sin. (\varphi + n\delta)$ gesetzt, geben für die Sekante folgenden Reihen-Ausdruck:

$$\tfrac{1}{2} \sec. \varphi = \cos. \varphi - \cos. 3\varphi + \cos. 5\varphi - \cos. 7\varphi + \&c.$$

Daraus wird durch ähnliche Verwandlungen: $\sec.\ \varphi = 1$

$$-\frac{2\varphi^2}{1.2}\Sigma \pm (2n-1)^2 + \frac{2\varphi^4}{1.2.3.4}.\Sigma \pm (2n-1)^4$$

— &c. Diese Reihe verglichen mit der in (4) erwiesenen zeigt, daß $\Sigma \pm (2n-1)^{2m} = \pm \frac{1}{2}\alpha^M$, wobey das untere Zeichen für ein ungerades, das obere für ein gerades m gilt. So erhellt also, daß auf eine sehr einfache Art die Summe folgender unendlichen Reihe: $1 - 3^{2m} + 5^{2m} - 7^{2m} + \&c.$, durch die Zahlen α, α^{I}, α^{II} u. s. w. jedesmal bestimmt werden könne. Darin zeigt sich eine nicht ganz unmerkwürdige, und soviel ich weiß, noch nicht vollständig bemerkte Analogie zwischen den Reihen von Potenzen, einerseits der natürlichen, und dann der ungeraden Zahlen, beyderseits mit abwechselnden Zeichen. Es ist bekannt, auch im vorhergehenden gehörig erwiesen, daß bey der ersten Art von Reihen die Summe für bejahte gerade Exponenten verschwinde, für eben solche ungerade durch die Bernoullischen Zahlen bestimmt werde, und für verneinte gerade durch eben diese Zahlen und Potenzen von π. Diese drey Säze lassen sich auch bey der andern Art von Reihen anbringen, wenn man nur, so wie sie hier ausgedrückt sind, gerad und ungerad bey den Exponenten verwechselt, und statt der Bernoullischen Zahlen die denselben entsprechende (4) α, α^{I}, α^{II} u. s. w. nimmt.

6) Die Reihe für die Cosecante findet man auf gleiche Weise, wie die für die Secante, durch bloße Division: es sey nemlich

$$\text{cosec.}\,\varphi = \frac{1}{\sin.\,\varphi} = \frac{1}{\varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1..5} =}$$

$$= \frac{1}{\varphi} + a^{\text{I}}\,\varphi + a^{\text{II}}\,\varphi^3 + \&c.$$

so wird das Verhältniß der Coefficienten dieser recurrirenden Reihe durch folgende Gleichung bestimmt:

$$a^N - \frac{a^{N-\text{I}}}{1.2.3} + \frac{a^{N-\text{II}}}{1..5} - \&c. \pm \frac{1}{1.2.3...2n+1}$$

Daraus erhellt, verbunden mit (III. 3. und 4.), daß

$$a^N = 2.\pi^{-2n}\Sigma \pm \frac{1}{2^{2n}} = 2\,\frac{(2^{2n-1}-1)\mathfrak{A}^N}{1.2.3...2n}.$$

Unmittelbar läßt sich auch die Reihe für die Cosekante aus der für die Cotangente ableiten, weil cosec. φ $=$ cot. $\frac{1}{2}\,\varphi$ — cot. φ *).

7) Man könnte auf den Gedanken gerathen, ob nicht etwa die Reihe für die Tangente auf eine ähnliche Weise, wie die für den Sinus, in ein Product aus unendlich vielen Factoren könne aufgelöset werden. In der That, wenn man die Gründe liest, aus welchen die meisten Schriftsteller **) jenen Ausdruck für den Sinus erweisen, sollte man fast versucht werden, eben dieselben wörtlich und unverändert auf die Tangente überzutragen. Es hat

*) Vergl. *Euler* Inst. C. D. p. 541.

**) Auch die vorzüglichsten unter den neuern Schriftstellern über die höhere Analysis, z. B. Herr Obristlieutenant von Tempelhoff (Analys. d. Unendl. S. 478), *Ed. Waring* (Medit. Analyt. p. 617), u. a. — Joh. Bernoulli, der Erfinder des Satzes, hat sich selbst Zweifel dagegen gemacht: diese hat Herr Hofrath Kästner gehoben (Anal. d. Unendl. §. 338. u. f. w.)

Daraus wird durch ähnliche Verwandlungen: $\sec.\ \varphi = 1$
$$- \frac{2\,\varphi^2}{1.2}\,\Sigma \pm (2n-1)^2 + \frac{2\,\varphi^4}{1.2.3.4}.\,\Sigma \pm (2n-1)^4$$
— &c. Diese Reihe verglichen mit der in (4) erwiesenen zeigt, daß $\Sigma \pm (2n-1)^{2m} = \pm \frac{1}{2}\,\alpha^M$, wobey das untere Zeichen für ein ungerades, das obere für ein gerades m gilt. So erhellt also, daß auf eine sehr einfache Art die Summe folgender unendlichen Reihe: $1 - 3^{2m} + 5^{2m} - 7^{2m} +$ &c., durch die Zahlen α, α^{I}, α^{II} u. s. w. jedesmal bestimmt werden könne. Darin zeigt sich eine nicht ganz unmerkwürdige, und soviel ich weiß, noch nicht vollständig bemerkte **Analogie** zwischen den Reihen von Potenzen, einerseits der natürlichen, und dann der ungeraden Zahlen, beyderseits mit abwechselnden Zeichen. Es ist bekannt, auch im vorhergehenden gehörig erwiesen, daß bey der ersten Art von Reihen die Summe für bejahte gerade Exponenten verschwinde, für eben solche ungerade durch die Bernoullischen Zahlen bestimmt werde, und für verneinte gerade durch eben diese Zahlen und Potenzen von π. **Diese drey Säze lassen sich auch bey der andern Art von Reihen anbringen**, wenn man nur, so wie sie hier ausgedrückt sind, gerad und ungerad bey den Exponenten verwechselt, und statt der Bernoullischen Zahlen die denselben entsprechende (4) α, α^{I}, α^{II} u. s. w. nimmt.

6) Die Reihe für die **Cosecante** findet man auf gleiche Weise, wie die für die Secante, durch bloße Division: es sey nemlich

$$\text{cosec.}\,\varphi = \frac{1}{\text{sin.}\,\varphi} = \frac{1}{\varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1..5}} =$$

$$= \frac{1}{\varphi} + a^{\mathrm{I}}\,\varphi + a^{\mathrm{II}}\,\varphi^3 + \&c.$$

so wird das Verhältniß der Coefficienten dieser recurrirenden Reihe durch folgende Gleichung bestimmt:

$$a^N - \frac{a^{N-\mathrm{I}}}{1.2.3} + \frac{a^{N-\mathrm{II}}}{1..5} - \&c. \pm \frac{1}{1.2.3...2n+1}$$

Daraus erhellt, verbunden mit (III. 3. und 4.), daß

$$a^N = 2.\pi^{-2n}\Sigma \pm \frac{1}{2^{2n}} = 2\,\frac{(2^{2n-1}-1)\,\mathfrak{A}^N}{1.2.3...2n}.$$

Unmittelbar läßt sich auch die Reihe für die Cosekante aus der für die Cotangente ableiten, weil cosec. φ $=$ cot. $\frac{1}{2}\,\varphi$ — cot. φ *).

7) Man könnte auf den Gedanken gerathen, ob nicht etwa die Reihe für die Tangente auf eine ähnliche Weise, wie die für den Sinus, in ein Product aus unendlich vielen Factoren könne aufgelöset werden. In der That, wenn man die Gründe liest, aus welchen die meisten Schriftsteller **) jenen Ausdruck für den Sinus erweisen, sollte man fast versucht werden, eben dieselben wörtlich und unverändert auf die Tangente überzutragen. Es hat

*) Vergl. *Euler* Inst. C. D. p. 541.

**) Auch die vorzüglichsten unter den neuern Schriftstellern über die höhere Analysis, z. B. Herr Obristlieutenant von Tempelhoff (Analys. d. Unendl. S. 478), *Ed. Waring* (Medit. Analyt. p. 617), u. a. — Joh. Bernoulli, der Erfinder des Satzes, hat sich selbst Zweifel dagegen gemacht: diese hat Herr Hofrath Kästner gehoben (Anal. d. Unendl. §. 338. u. f. w.)

keinen Zweifel, daß tang. x dann immer und nur dann verschwinde, wenn sin. $x = 0$ wird, also für $x = 0$, $= \pm \pi$, $\pm 2 \pi$, $\pm 3 \pi$ u. s. w.: warum sollte sie nicht eben so wie der Sinus, durch das Product $x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)$ $\left(1 - \frac{x^2}{4 \pi^2}\right) \ldots$ dargestellt werden? (Diese Form müssen die Factoren haben, weil das erste Glied der Gleichung: $\frac{\text{tang. } x}{x} = 0$, $= 1$ ist). Daraus könnte man wenigstens die Vermuthung ziehen, daß die gewöhnliche Beweisart in irgend einem Puncte nicht ganz vollständig sey. Ein anderer mehr directer Zweifel scheint in folgender Betrachtung zu liegen. Wenn man eine zusammengesetzte algebraische Größe X, eine Function von x, als ein Product aus einfachen Factoren $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$ u. s. w. ausdrückt, so müssen α, β, γ u. s. w. die Wurzeln der Gleichung $X = 0$ seyn, d. i. wenn man diese Werthe von x in die Function setzt, so muß X wirklich verschwinden; oder die einzelnen Glieder dieser Größe zusammengenommen müssen 0 geben. Für sin. x ist $X = x - \frac{x^3}{1 . 2 . 3} + \frac{x^5}{1 \ldots 5} -$ &c.: nun wird zwar sin. x offenbar $= 0$, für $x = 0$, $= \pm \pi$, $\pm 2 \pi$ 2c; ob aber der unendliche Reihen-Ausdruck auch wirklich verschwinde, wenn für x, π, 2π 2c. gesetzt wird, möchte vielleicht eine andere Frage seyn. Bekanntlich unterscheidet man in der Lehre von den Reihen analytische und arithmetische Summen. Jene sind eigentlich Ausdrückungen, aus deren Entwicklung die Reihe entstanden

ist, oder wenigstens als entstanden gedacht werden kann *).
In diesem Sinne ist sin. x immer die Summe der
unendlichen Reihe: $x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1...5} -$ &c.:
und so kann diese Summation, in ihrer Allgemeinheit,
bey analytischen Untersuchungen mit Nutzen gebraucht
werden. Der Gebrauch, der aber hier von derselben gemacht wird, scheint noch mehr vorauszusetzen, nemlich
daß sin. x auch vor $x = \pi$, 2π u. s. w. die **arithmetische Summe** jener Reihe seyn müsse. Und das ist es,
was die Gründe, woraus man gewöhnlich Reihen dieser
Art herleitet, vielleicht nicht mit der vollkommensten Evidenz darthun. So gilt die Reihe, welche den Bogen durch
den Sinus ausdrückt, offenbar nur für den kleinsten Bogen, der einem gewissen Sinus zugehört. Das gewöhnliche Verfahren, die Reihe, von welcher hier die die Rede
ist, zu erweisen, ist, dieselbige aus der nur genannten
abzuleiten. Aber auch die andern Methoden, den Sinus
auszudrücken, möchten immer noch einigen Zweifel in
Ansehung des erwähnten Fragepuncts übrig lassen **).
Die Frage, um sie hier noch einmal bestimmt anzugeben,
ist, ob Sätze, welche für endliche algebraische Ausdrücke
erwiesen sind, die immer eine arithmetische Summe haben,
auch auf transcendente unendliche Reihen-Ausdrücke

*) *Euler* de feriebus reciprocis, Comment. Petrop. Nov. T. V.

**) Eine einfachere Methode, als die im Text zuerst erwähnte, lehrt Herr Hofrath Kästner (l. c. §. 285), nemlich durch die Differential-Gleichung $\frac{d^2 s}{d\phi^2} = - s$. Die gewöhnliche Reihe für den Sinus ist eigentlich nur ein particulares Integral davon, wodurch man stillschweigend anzunehmen scheint, daß ϕ den kleinsten Bogen bedeute.

findet, oder noch bequemer, indem man die Form der Reihe annimmt, und zur Bestimmung der Coefficienten, die Gleichung: tang. $x = \cot. x - 2 \cot. 2x$, mit Zuziehung der nur erwiesenen Reihe für die Tangente, gebraucht.

2) Diese Reihen kommen bey den Schriftstellern über die höhere Analysis selten vollständig entwickelt vor *), weil das Gesetz der Coefficienten nicht so auffallend ist, als bey den Reihen für Cosinusse und Sinusse. Sonst läßt sich dieses Gesetz auf mehr als eine Art auch aus den ersten Gründen ableiten. So ist $\cot. x = \frac{\cos. x}{\sin. x}$. Löst man nun den Cosinus und Sinus in ihre unendliche Progressionen auf, so entsteht durch Division eine Reihe, welche bekanntlich zu den recurrirenden Reihen gehört. Ist demnach $\cot. x = \frac{1}{x}(1 + a^{I}x^{2} + a^{II}x^{4} + a^{III}x^{6} + \&c.)$ so wird jeder Coefficient a^{N} durch alle vorhergehenden vermittelst folgender Gleichung bestimmt: $0 = a^{N} - \frac{a^{N-I}}{1.2.3} + \frac{a^{N-II}}{1\ldots5} - \&c. \mp \frac{a^{I}}{1\ldots\ldots2n-1} \pm \frac{2n}{1\ldots2n+1}$. Verglichen mit dem was oben in (III. 4.) ist erwähnt worden, zeigt diese Gleichung, daß $a_{N} = -\frac{2^{2n}}{1.2.3\ldots2n} . \mathfrak{A}^{N}$ sey, wenn $\mathfrak{A}^{N}$ die n^{te} Bernoullische Zahl andeutet. — Eine andere bequeme Art, die Reihe für die Cotangente zu finden, gibt die

*) Euler hat sie (Inst. Calc. Diff. Cap. V. p. 424) aus andern Gründen abgeleitet.

Integration an die Hand. Es ist nemlich cot. $x =$

$$-\int \frac{dx}{\sin. x^2} = -2\int \frac{dx}{1 - \cos. 2x}:$$ der in dx multiplicirte Bruch läßt sich gleichfalls in eine recurrirende Reihe entwickeln, welche mit dx multiplicirt und gehörig integrirt $-\frac{1}{2}$ cot. x gibt. Daraus folgt dasselbe Resultat. — Aus der Reihe für die Cotangente ergibt sich die andere für die Tangente unmittelbar, weil tang. $x =$ cot. $x - 2$ cot. $2x$ ist.

2) Legt man dieses Verfahren, jene Reihen zu finden, zum Grunde, so entsteht daraus vermittelst der Verwandlung in (1) ein neuer Beweis für den oben schon erwiesenen Ausdruck der Summe $\Sigma \pm n^{2m-1}$. Eben so läßt sich durch diese Art zu schließen, darthun, daß $\Sigma \pm n^{2m} = 0$ sey. Es ist nemlich (in XVI. vor φ, $-\varphi$, und vor δ, 2φ gesetzt) cos. φ — cos. 2φ + cos. 3φ — cos. 4φ + &c $= \Sigma \pm$ cos. $n\varphi$ $= \frac{1}{2}$. Daraus wird, durch Auflösung der Cosinusse in ihre Reihen, $\Sigma \pm n - \frac{\varphi^2}{1.2} \Sigma \pm n^2 + \frac{\varphi^4}{1..4} \Sigma \pm n^4$ — &c. $= \frac{1}{2}$. Da diese Gleichung für jedes φ gilt, so müssen die Summen der Coefficienten-Reihen verschwinden, bis auf $\Sigma \pm n = \frac{1}{2}$. — Obgleich diese Beweisart ganz einfach ist, so schien es mir doch nicht überflüßig, im vorhergehenden, eben diese Sätze als Folgerungen aus allgemeineren Betrachtungen darzustellen. Eben diese Betrachtungen geben zwar auch Ausdrücke für $\Sigma \pm (2n-1)^r$, bey geraden und ungeraden r: aber es läßt sich daraus nicht ohne einige Weitläufigkeit darthun, daß im zweyten Falle die Summe jedesmal ver-

schwinde, und welchem Gesetze sie im ersten folge. Beydes zu übersehen, sind Schlüsse von der Art, wie sie hier geführt worden sind, sehr dienlich: dieß wird aus dem nachfolgenden sogleich erhellen.

4) Für die Sekante eine Reihe zu finden, verfährt man auf ähnliche Art wie in (1). Es ist nemlich

$$\sec.\,\varphi = \frac{1}{\cos.\,\varphi} = \frac{1}{1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1..4} - \&c.}$$

Dieser Bruch entwickelt, gibt eine recurrirende Reihe: $a + a^{\text{I}}\varphi^2 + a^{\text{II}}\varphi^4 + a^{\text{III}}\varphi^6 + \&c.$; der Nenner zeigt die Verhältniß-Skale, und daraus entsteht für die Coefficienten folgende Gleichung:

$$a^N - \frac{1}{1.2}a^{N-\text{I}} + \frac{1}{1.2.3.4}a^{N-\text{II}} - \frac{1}{1..6}a^{N-\text{III}} + \&c. \pm \frac{a}{1.2.3\ldots 2m}.$$

Dieses Gesetz verglichen mit demjenigen, welches in (X. 4) für die Summen der reciproken Reihen von Potenzen ungerader Zahlen mit abwechselnden Zeichen ist erwiesen worden, zeigt daß

$$\Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m+1}} = \frac{\pi^{2m+1}}{2^{2m+2}} \cdot a^M.$$

So sind also die Zahlen a, a^{I}, a^{II} &c. in Rücksicht auf diese Reihen, eben das, was die Bernoullischen Zahlen für die reciproke Reihen von Potenzen der natürlichen Zahlen, oder für $\Sigma \frac{1}{n^{2m}}$, und für die Tangenten-Reihe

sind. Man nenne für jedes q, $a^Q = \frac{\alpha^Q}{1.2.3\ldots 2q}$ so erhält man neue Zahlen α, α^{I}, α^{II} u. s. w., welche **Euler** bis auf die 10te berechnet hat (Instit. Calc. Diff. C. VIII. p. 542). Diese zum Grunde gelegt wird also:

$$\sec. x = \alpha + \frac{\alpha^{\text{I}} x^2}{1.2} + \frac{\alpha^{\text{II}} x^4}{1.2.3.4} + \frac{\alpha^{\text{III}} x^6}{1\ldots 6} + \&c.$$

$$\Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m+1}} = \frac{\alpha^M}{1.2.3..2m} \cdot \frac{\pi^{2m+1}}{2^{2m+2}}.$$

5) Setzt man in dem allgemeinen Ausdrucke für $\Sigma \pm a^N \sin.(\varphi + n\delta)$ (XVI. 6.) vor φ, $-\varphi$, und statt δ, $\frac{\varphi}{2}$, so folgt daraus nachstehende Summation:

$$\sin. \varphi - \sin. 3\varphi + \sin. 5\varphi - \sin. 7\varphi + \&c. = 0.$$

Diese Reihe nach der bisherigen Art behandelt, verändert sich in diese:

$$\varphi . \Sigma \pm (2n-1) - \frac{\varphi^3}{1.2.3} . \Sigma \pm (2n-1)^3$$
$$+ \frac{\varphi^5}{1..5} \Sigma \pm (2n-1)^5 - \&c.$$

Da dieser Ausdruck für jedes φ verschwinden muß, so folgt daraus: $\Sigma \pm (2n-1)^{2m-1} = 0$, ein neuer einfacher Beweis für diesen schon im vorhergehenden gefundenen Satz. — Die vorigen Werthe von δ und φ in $\Sigma \pm a^N \sin. (\varphi + n\delta)$ gesetzt, geben für die Sekante folgenden Reihen-Ausdruck:

$$\tfrac{1}{2} \sec. \varphi = \cos. \varphi - \cos. 3\varphi + \cos. 5\varphi$$
$$- \cos. 7\varphi + \&c.$$

Daraus wird durch ähnliche Verwandlungen: $\sec.\,\varphi = 1$

$$- \frac{2\,\varphi^2}{1.2}\,\Sigma \pm (2n-1)^2 + \frac{2\,\varphi^4}{1.2.3.4}\,.\,\Sigma \pm (2n-1)^4$$

— &c. Diese Reihe verglichen mit der in (4) erwiesenen zeigt, daß $\Sigma \pm (2n-1)^{2m} = \pm \frac{1}{2}\,\alpha^M$, wobey das untere Zeichen für ein ungerades, das obere für ein gerades m gilt. So erhellt also, daß auf eine sehr einfache Art die Summe folgender unendlichen Reihe: $1 - 3^{2m} + 5^{2m} - 7^{2m} +$ &c., durch die Zahlen α, α^{I}, α^{II} u. s. w. jedesmal bestimmt werden könne. Darin zeigt sich eine nicht ganz unmerkwürdige, und soviel ich weiß, noch nicht vollständig bemerkte **Analogie** zwischen den Reihen von Potenzen, einerseits der natürlichen, und dann der ungeraden Zahlen, beyderseits mit abwechselnden Zeichen. Es ist bekannt, auch im vorhergehenden gehörig erwiesen, daß bey der ersten Art von Reihen die Summe für bejahte gerade Exponenten verschwinde, für eben solche ungerade durch die Bernoullischen Zahlen bestimmt werde, und für verneinte gerade durch eben diese Zahlen und Potenzen von π. **Diese drey Säze lassen sich auch bey der andern Art von Reihen anbringen**, wenn man nur, so wie sie hier ausgedrückt sind, gerad und ungerad bey den Exponenten verwechselt, und statt der Bernoullischen Zahlen die denselben entsprechende (4) α, α^{I}, α^{II} u. s. w. nimmt.

6) Die Reihe für die **Cosecante** findet man auf gleiche Weise, wie die für die Secante, durch bloße Division: es sey nemlich

$$\text{cosec.}\,\varphi = \frac{1}{\text{sin.}\,\varphi} = \frac{1}{\varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1..5}} =$$

$$= \frac{1}{\varphi} + a^{\text{I}}\,\varphi + a^{\text{II}}\,\varphi^3 + \&c.$$

so wird das Verhältniß der Coefficienten dieser recurrirenden Reihe durch folgende Gleichung bestimmt:

$$a^N - \frac{a^{N-\text{I}}}{1.2.3} + \frac{a^{N-\text{II}}}{1\,..5} - \&c. \pm \frac{1}{1.2.3...2n+1}$$

Daraus erhellt, verbunden mit (III. 3. und 4.), daß

$$a^N = 2.\pi^{-2n}\,\Sigma \pm \frac{1}{2^{2n}} = 2\,\frac{(2^{2n-1}-1)\,\mathfrak{A}^N}{1.2.3...2n}.$$

Unmittelbar läßt sich auch die Reihe für die Cosekante aus der für die Cotangente ableiten, weil cosec. φ $=$ cot. $\frac{1}{2}\,\varphi$ — cot. φ *).

7) Man könnte auf den Gedanken gerathen, ob nicht etwa die Reihe für die Tangente auf eine ähnliche Weise, wie die für den Sinus, in ein Product aus unendlich vielen Factoren könne aufgelöset werden. In der That, wenn man die Gründe liest, aus welchen die meisten Schriftsteller **) jenen Ausdruck für den Sinus erweisen, sollte man fast versucht werden, eben dieselben wörtlich und unverändert auf die Tangente überzutragen. Es hat

*) Vergl. *Euler* Inst. C. D. p. 541.

**) Auch die vorzüglichsten unter den neuern Schriftstellern über die höhere Analysis, z. B. Herr Obristlieutenant von Tempelhoff (Analys. d. Unendl. S. 478), *Ed. Waring* (Medit. Analyt. p. 617), u. a. — Joh. Bernoulli, der Erfinder des Satzes, hat sich selbst Zweifel dagegen gemacht: diese hat Herr Hofrath Kästner gehoben (Anal. d. Unendl. §. 338. u. s. w.)

keinen Zweifel, daß tang. x dann immer und nur dann verschwinde, wenn sin. $x = 0$ wird, also für $x = 0$, $= \pm \pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$ u. s. w.: warum sollte sie nicht eben so wie der Sinus, durch das Product $x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)$ $\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)$.... dargestellt werden? (Diese Form müssen die Factoren haben, weil das erste Glied der Gleichung: $\frac{\text{tang. } x}{x} = 0, = 1$ ist). Daraus könnte man wenigstens die Vermuthung ziehen, daß die gewöhnliche Beweisart in irgend einem Puncte nicht ganz vollständig sey. Ein anderer mehr directer Zweifel scheint in folgender Betrachtung zu liegen. Wenn man eine zusammengesetzte algebraische Größe X, eine Function von x, als ein Product aus einfachen Factoren $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$ u. s. w. ausdrückt, so müssen α, β, γ u. s. w. die Wurzeln der Gleichung $X = 0$ seyn, d. i. wenn man diese Werthe von x in die Function setzt, so muß X wirklich verschwinden; oder die einzelnen Glieder dieser Größe zusammengenommen müssen 0 geben. Für sin. x ist X $= x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1...5}$ — &c.: nun wird zwar sin. x offenbar $= 0$, für $x = 0$, $= \pm \pi$, $\pm 2\pi$ ꝛc; ob aber der unendliche Reihen-Ausdruck auch wirklich verschwinde, wenn für x, π, 2π ꝛc. gesetzt wird, möchte vielleicht eine andere Frage seyn. Bekanntlich unterscheidet man in der Lehre von den Reihen analytische und arithmetische Summen. Jene sind eigentlich Ausdrückungen, aus deren Entwicklung die Reihe entstanden

ist, oder wenigstens als entstanden gedacht werden kann*). In diesem Sinne ist sin. x immer die Summe der unendlichen Reihe: $x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1...5} - \&c.$: und so kann diese Summation, in ihrer Allgemeinheit, bey analytischen Untersuchungen mit Nutzen gebraucht werden. Der Gebrauch, der aber hier von derselben gemacht wird, scheint noch mehr vorauszusetzen, nemlich daß sin. x auch vor $x = \pi$, 2π u. s. w. die **arithmetische Summe** jener Reihe seyn müsse. Und das ist es, was die Gründe, woraus man gewöhnlich Reihen dieser Art herleitet, vielleicht nicht mit der vollkommensten Evidenz darthun. So gilt die Reihe, welche dtn Bogen durch den Sinus ausdrückt, offenbar nur für den kleinsten Bogen, der einem gewissen Sinus zugehört. Das gewöhnliche Verfahren, die Reihe, von welcher hier die die Rede ist, zu erweisen, ist, dieselbige aus der nur genannten abzuleiten. Aber auch die andern Methoden, den Sinus auszudrücken, möchten immer noch einigen Zweifel in Ansehung des erwähnten Fragepuncts übrig lassen **). Die Frage, um sie hier noch einmal bestimmt anzugeben, ist, ob Sätze, welche für endliche algebraische Ausdrücke erwiesen sind, die immer eine arithmetische Summe haben, auch auf transcendente unendliche Reihen-Ausdrücke

*) *Euler* de seriebus reciprocis, Comment. Petrop. Nov. T. V.

**) Eine einfachere Methode, als die im Text zuerst erwähnte, lehrt Herr Hofrath Kästner (l. c. §. 285), nemlich durch die Differential-Gleichung $\frac{d^2 s}{d\phi^2} = - s$. Die gewöhnliche Reihe für den Sinus ist eigentlich nur ein particulares Integral davon, wodurch man stillschweigend anzunehmen scheint, daß ϕ den kleinsten Bogen bedeute.

können angewandt werden, denen in vielen Fällen nur eine analytische Summe zukommt *). — Diese Gedanken vollständig zu entwickeln, würde hier zu weitläufig seyn, und noch andere Zwischenuntersuchungen nothwendig machen **), auch gewissermaßen überflüßig, da meine Absicht nichts weniger als die war, den Satz selbsten zu wiederlegen, sondern nur gegen die gewöhnliche Beweisart einige Einwendungen vorzutragen, die ich mir selbst gegenwärtig nicht vollkommen befriedigend auflösen kann: denn freylich ist es sehr oft leichter, Zweifel zu machen, als solche zu heben.

XVIII. Summirung der Reihen, in welchen Tangenten, Sekanten u. s. w. vorkommen.

1) So häufig die Analysten Untersuchungen über Reihen von Cosinussen und Sinussen angestellt haben, so wenig haben sie sich seither mit Summirung solcher Reihen beschäftigt, in deren Gliedern Tangenten und Sekanten befindlich sind. Auch läßt sich wirklich das Verfahren,

*) Ueberhaupt hat es Schwürigkeiten, unendliche Reihen als Gleichungen zu betrachten. So könnte man aus den Reihen, welche den Bogen durch den Sinus, oder die Tangente ausdrücken, schließen, daß einem verschwindenden Bogen unzählige Sinusse oder Tangenten zukommen: da gewiß jeder Bogen nur einen Sinus und eine Tangente hat, auch nicht einmal mehrere unmögliche.

**) Alle Untersuchungen dieser Art müßten auf solche Begriffe zurückgebracht werden, wie H. H. Kästner bey der Reihe, die aus $\frac{1}{1 \pm x}$ entsteht, entwickelt hat (Anal. d. Endl. §. 15) Bey genauerer Prüfung wird man finden, daß alle Summationen unendlicher Reihen von dieser ausgehen, oder durch irgend einen, zuweilen verborgenen, Weg zu derselben zurückkommen.

welches man am gewöhnlichsten bey der Summirung der Reihen jener Art gebraucht hat (XVI.), bey den Reihen der andern Art gar nicht anbringen. Ich wage hier einen Versuch, diese Lücke einigermaßen auszufüllen, und die Anwendung der gegenwärtigen Methode auch bey diesen Reihen zu zeigen. Zuerst wird es nicht überflüßig seyn, dieselbige bey einer von den wenigen Reihen, deren Summen schon bekannt sind, gleichsam im voraus zu versuchen. Diese Reihe ist folgende:

$$\text{tang.}\,\varphi + \tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{4}\varphi + \tfrac{1}{8}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{8}\varphi + \&c. = \Sigma\,\frac{1}{2^{n-1}}\,\text{tang.}\,\frac{\varphi}{2^{n-1}}.$$

Euler hat durch ein, zwar einfaches, aber gewissermaßen indirectes Verfahren, ihre Summe $= \frac{1}{\varphi} - 2\,\text{cot.}\,2\,\varphi$ gefunden. Ein besonderer Fall dieser Summation gibt eine zierliche Construction für die Quadratur des Kreises, welche schon Cartesius kannte *).

2) Man drücke, um die Summe dieser Reihe zu finden, nach der bisherigen Gewohnheit die Tangenten durch ihre unendliche Progressionen aus, so wird $\Sigma\,\frac{1}{2^{n-1}}\,.\,\text{tang.}\,\frac{\varphi}{2^{n-1}}$

$$= \Sigma\,\frac{1}{2^{n-1}}\left(\begin{array}{l} \frac{2^2\,(2^2-1)}{1\,.\,2}\,\mathfrak{A}^{I}\,\frac{\varphi}{2^{n-1}} \\ + \frac{2^4\,(2^4-1)}{1\,.\,.\,4}\,\mathfrak{A}^{II}\,\frac{\varphi^3}{2^{3\,(n-1)}} \\ + \&c. \end{array}\right)$$

*) Euler. Annotationes in locum quendam Cartesii. — Comment. Petrop. Nov. T. VIII. p. 157 &c. In den Opusc. Analyt. T. I. ist diese Untersuchung fortgesetzt.

Nun ist für ein willkürliches x, $\Sigma \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x-1}$; setzt man also für x nach und nach 2^2, 2^4, 2^6 u. s. w., und summirt die einzelnen Glieder dieses Ausdrucks, so heben sich $2^2 - 1$, $2^4 - 1$ u. s. w. im Zähler und Nenner gegenseitig auf, und man erhält $\Sigma \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \text{tang.} \frac{\varphi}{2^{n-1}}$

$$= \frac{2^4 \mathfrak{A}^I \varphi}{1 \cdot 2} + \frac{2^8 \mathfrak{A}^{II} \varphi^3}{1 \cdot \cdot 4} + \&c. = \frac{1}{\varphi} - 2 \cot. 2\varphi,$$

wie unmittelbar aus der obigen Reihe für die Cotangente folgt *).

3) Wenn man die Gründe des Verfahrens untersucht, wodurch im Anfang (III.) die reciproke Reihen mit Cosinussen und Sinussen vielfacher Bögen summirt worden sind, so wird man leicht auf den Gedanken gerathen, daß sich dasselbe auch bey Tangenten anbringen lasse. Die allgemeine Auflösung ist diese. Es sey die Summe der unendlichen Reihe: t. $\varphi - \frac{t.\, 2\varphi}{2^{2m+1}} + \frac{t.\, 3\varphi}{3^{2m+1}}$

$$- \frac{t.\, 4\varphi}{4^{2m+1}} + \&c. = \Sigma \pm \frac{t.\, n\varphi}{n^{2m+1}} = \mathfrak{S},$$ so wird durch Verwandlung der Tangenten in ihre Progressionen:

*) Die Summe einer zusammengesetzten Größe (was das Wort Summe oder das Zeichen Σ hier bedeute, ist bekannt) wird aus der Summe der einzelnen Glieder zusammengesetzt. Die Summe eines Products, dessen einer Factor n nicht enthält, also eine Constante ist, gleicht dem Producte aus dieser Constante in die Summe des andern Factors. Diese beyden Bemerkungen vorausgesetzt, gewährt die gegenwärtige Bezeichnungsart immer sogleich die allgemeine Uebersicht: welches kein unwesentlicher Vortheil ist.

$$\mathfrak{S} = \frac{2^2 (2^2 - 1)}{1 \cdot 2} \mathfrak{A}^I \varphi . \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m}}$$

$$+ \frac{2^4 (2^4 - 1)}{1 \cdot \cdot 4} \mathfrak{A}^{II} \varphi^3 \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-2}}$$

$$+ \frac{2^6 (2^6 - 1)}{1 \cdot \cdot 6} \mathfrak{A}^{III} \varphi^5 \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-1}} + \&c.$$

Das Gesetz des Fortgangs bey diesem Ausdruck ist auffallend; die Summen, welche in demselben vorkommen, sind durch die vorhergehenden Untersuchungen bekannt; die letzte derselben ist $\Sigma \pm n^0 = \frac{1}{2}$, die folgenden mit geraden bejahten Exponenten verschwinden. So ist also z. B.

$$\text{t.}\, \varphi - \frac{\text{t.}\, 2\, \varphi}{2^3} + \frac{\text{t.}\, 3\, \varphi}{3^3} - \frac{\text{t.}\, 4\, \varphi}{4^3} + \&c.$$

$$= \frac{\pi^2\, \varphi}{12} + \frac{\varphi^3}{6}$$

Ueberhaupt lassen sich die Summen dieser unendlichen Reihen, in welchen der Exponent im Nenner eine ungerade Zahl ist, immer durch Potenzen von φ und π ausdrücken. — Eben diese Summen ergeben sich auch, wenn man vor tang. $n\,\varphi$, $\Sigma \pm$ sin. $n\,\varphi$ setzt, und die oben erwähnte Summation $\Sigma \pm \frac{\text{sin.}\, n\,\varphi}{n^{2m+1}}$ zu Hülfe nimmt.

3) Durch eben dieses Verfahren erhält man die Summe folgender unendlichen Reihe:

$$\text{t.}\, \varphi - \frac{\text{t.}\, 3\varphi}{3^{2m}} + \frac{\text{t.}\, 5\varphi}{5^{2m}} - \&c. = \Sigma \pm \frac{\text{t.}\, (2\,n - 1)\, \varphi}{(2\,n - 1)^{2m}}$$

Diese Summe ist nemlich

$$= \frac{2^2(2^2-1)}{1 \cdot 2} \mathfrak{A}^I \varphi \Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-1}}$$

$$+ \frac{2^4(2^4-1)}{1 \ldots 4} \mathfrak{A}^{II} \varphi^3 \Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-3}}$$

$$+ \frac{2^6(2^6-1)}{1 \ldots 6} \mathfrak{A}^{III} \varphi^5 \Sigma \pm \frac{1}{(2n-1)^{2m-5}}$$

$+$ &c.

Bey denen hier vorkommenden Partialsummen, die aus dem vorhergehenden bekannt sind, kommt man endlich auf verschwindende Summen: die letzte ist

$$= \Sigma \pm \frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

4) Durch das gleiche Verfahren lassen sich ähnliche Reihen mit Cotangenten vielfacher Bögen summiren. Es ist nemlich $\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m+1}} \cdot \cot. n\varphi = \frac{1}{\varphi} \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m+2}}$

$$- \frac{2^2 \mathfrak{A}^I}{1 \cdot 2} \varphi \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m}} - \frac{2^4 \mathfrak{A}^{II}}{1 \ldots 4} \varphi^3 \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-2}}$$

$+$ &c. Eben so läßt sich $\Sigma \pm \frac{\cot. \varphi(2n-1)}{(2n-1)^{2m}}$ angeben. Die letzte der in jenem Ausdruck vorkommenden Partialsummen ist $= \Sigma \pm 1 = \frac{1}{2}$; die folgenden alle verschwinden.

5) Eben so erhellt, wie die Summe der unendlichen Reihe:

$$\operatorname{cosec.} \varphi - \frac{1}{2^{2m+1}} \cdot \operatorname{cosec.} 2\varphi + \frac{1}{3^{2m+1}} \cdot \operatorname{cosec.} 3\varphi$$
$$- \&c.$$

gefunden werde. Der Ausdruck für die Summe läßt sich leicht aus der obigen Reihe für die Cosekante vermittelst des bisherigen Verfahrens herleiten, gleicherweise auch $\Sigma \pm \frac{\text{cosec.}\,\varphi\,(2n-1)}{(2n-1)^{2m}}$. Bey eben solchen Sekanten-Reihen mussen die Exponenten der natürlichen Zahlen in den Nennern gerade seyn; dann findet sich $\Sigma \pm \frac{\text{sec.}\,n\,\varphi}{n^{2m}}$

$$= \alpha^{I} \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m}} + \alpha^{II} \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-2}} + \alpha^{III} \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-4}}$$

+ &c., wobey man wiederum auf verschwindende Summen kommt, eben so wie bey dem Ausdrucke für

$$\Sigma \pm \frac{\text{sec.}\,(2n-1)\,\varphi}{(2n-1)^{2m-1}}.$$

6) Aus den bisherigen Summationen lassen sich durch Differentiation und Integration noch mehrere andre herleiten: so erhält man aus der Tangenten-Reihe eine andere, deren allgemeines Glied $= \pm \frac{(\text{sec.}\,n\,\varphi)^2}{n^{2m}}$ (weil nemlich $d.\,\text{tang.}\,x = d\,x\,\text{sec.}\,x^2$); eben so ergibt sich aus der Cotangenten-Reihe, $\Sigma \pm \frac{(\text{cosec.}\,n\,\varphi)^2}{n^{2m}}$ u. s. w.

Durch Integration fliessen aus diesen Reihen auch die Summen von folgenden beyden:

$$\frac{\log.\,\text{cos.}\,\varphi}{1^{2m+2}} - \frac{\log.\,\text{cos.}\,2\varphi}{2^{2m+2}} + \frac{\log.\,\text{cos.}\,3\,\varphi}{3^{2m+2}} - \frac{\log.\,\text{cos.}\,4\,\varphi}{3^{2m+1}} + \&c.$$

$$\frac{\log.\,\text{sin.}\,\varphi}{1^{2m+2}} - \frac{\log.\,\text{sin.}\,2\,\varphi}{2^{2m+1}} + \frac{\log.\,\text{sin.}\,3\,\varphi}{3^{2m+1}} - \frac{\log.\,\text{sin.}\,4\,\varphi}{4^{2m+1}} + \&c.$$

Es ist nemlich $\int dx \tan. x = - \log. \cos. x$, $\int dx \cot. x = \log. \sin. x$. Bey der ersten Reihe ist die Constante $= 0$; bey der andern, in deren Summe $\log. \varphi \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m+2}}$ vorkommt, wird sie aus dem Falle $\varphi = 0$ gefunden $= - \frac{\log. 1}{1} + \frac{\log. 2}{2^{2m+2}} - \frac{\log. 3.}{3^{2m+2}}$ + &c.; daß also statt der zwoten Reihe eine andere gesetzt werden muß, deren allgemeines Glied

$$= \pm \frac{\log. \frac{1}{n} \sin. n \varphi}{n^{2m+2}}$$ ist. Aus der Cosekanten-Reihe (5) fließt durch eine ähnliche Integration die Summe von folgender Reihe:

$$\log. \tfrac{2}{1} \text{ t. } \varphi - \frac{1}{2^{2m+2}} \log. \tfrac{2}{2} \text{ t. } 2 \varphi$$

$$+ \frac{1}{3^{2m+2}} . \log. \tfrac{2}{3} \text{ t. } 3 \varphi$$

$$- \frac{1}{4^{2m+2}} . \log. \tfrac{2}{4} \text{ t. } 4 \varphi + \&c.$$

deren allgemeines Glied $= \pm \frac{1}{n^{2m+2}} . \log. \frac{2}{n} \tan. n \varphi$; dabey wird das bekante Integral: $\int \frac{dx}{\sin. x} = \log. \tan. \tfrac{1}{2} x$ zum Grunde gelegt; daß die tang. $n \varphi$ noch mit $\frac{2}{n}$ multiplicirt werden muß, folgt, wie vorhin, aus der Bestimmung der Constante für den Fall $\varphi = 0$. Eine ähnliche Summation ergibt sich aus der Reihe von Sekanten,

es

es ist nemlich $\int dx \sec. x = \log. t. \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} x\right)$, und daraus das allgemeine Glied der durch Integration entspringenden Reihe $= \pm \frac{1}{n^{2m+1}} . \log. t. \left(\frac{\pi}{4} + n\varphi\right)$ — Wollte man die Integration fortsetzen, so kommt man auf Integrale von der Form $\int dx \log. \cos. x$, $\int dx \log. \sin. x$, $\int dx \log. t. x$. Setzt man in dem ersten vor den Cosinus den Ausdruck durch Exponential-Grössen, so wird dasselbe $= - x \log. 2 + \frac{x^2}{2} \sqrt{-1}$ $+ \int dx \log. (1 + e^{-2x\sqrt{-1}}) = - x \log. 2$ $+ \frac{x^2}{2} \sqrt{-1} - \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left(\Sigma \pm \frac{z^n}{n^2} - \frac{\pi^2}{12}\right)$, wenn $e^{-2x\sqrt{-1}} = z$, und das Integral so genommen wird, daß es für $x = 0$ verschwindet *). Daraus übersieht man, daß das letztere von der Summation der Reihe: $z - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} - \frac{z^4}{4^2} +$ &c. abhängt; für $z = +1$ und $= -1$ ist dieselbige aus dem vorhergehenden bekannt, aber auch für $z = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ und $= \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (wovon weiter unten die Rede seyn wird); jene Werthe von z geben $x = \pi$, $= \frac{\pi}{2}$, und so erhellt daß $\int dx \log. \cos. x$, für $x = \frac{\pi}{2}$, gleich werde

*) Man überzeugt sich davon leicht, wenn man den Logarithmen in eine Reihe auflößt.

$-\frac{\pi}{2}$ log. 2. Die übrigen 3 Werthe lassen sich gleichfalls angeben, aber unter einer unmöglichen Gestalt. — Aus dem Integral ſin. d x log. coſ. x folgt das andere ſ. d y log. ſin. y unmittelbar, wenn man $y = \frac{\pi}{2} - x$ setzt: dadurch verwandelt sich dieses in $-$ſ. d x log. coſ. x $= \frac{\pi}{2}$ log. 2, von $x = 0$ bis zu $x = \frac{\pi}{2}$ genommen, also $= -\frac{\pi}{2}$ log. 2 von $x = \frac{\pi}{2}$ bis zu $x = 0$, oder von $y = 0$ bis zu $y = \frac{\pi}{2}$ *).

7) Wenn man die Gründe des Verfahrens genauer betrachtet, wodurch in (2) $\Sigma \frac{1}{2^n} . \text{tang.} \frac{\varphi}{2^n}$ gefunden worden, so wird man sich bald davon überzeugen, daß sich dasselbe noch weiter erstrecke, nemlich auf die Fälle, wenn im Nenner statt n; $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{4}$, $\frac{n}{8}$ ... $\frac{n}{2^m}$ vorkommen, oder die Exponenten von 2 nicht bloß die natürliche Zahlen, sondern submultipla derselben nach irgend einer Potenz, auch von 2, sind. Bey der Eulerischen Reihe ist $m = 0$: für $m = 1$ findet sich $\Sigma \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} . \text{tang.} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$

*) Man vergleiche damit das Verfahren, wodurch Euler bey einer andern Veranlassung den Particularwerth von ſ. d φ log. coſ. φ, von $\varphi = 0$ bis zu $\varphi = \frac{\pi}{2}$, erweist (Nov. Comment. Petrop. Tom. XIV. p. 167).

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{tang.} \frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \text{tang.} \frac{\varphi}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{8}} \text{tang.} \frac{\varphi}{\sqrt{8}}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{16}} \text{tang.} \frac{\varphi}{\sqrt{16}} + \&c. = \frac{2}{\varphi} - \text{cot.}\, \varphi$$

$- \sqrt{2} \,.\, \text{cot.}\, \varphi \sqrt{2}$; dort sind die Nenner 2, 4, 8, u. s. w. hier die Quadratwurzeln dieser Zahlen. Für Biquadratwurzeln, Wurzeln vom 8ten, 16ten Grade u. s. w. erhält man ähnliche Ausdrücke.

XIX. Reihen von Bögen, deren Tangenten nach einer gewissen Ordnung fortschreiten.

1) Das Verfahren, solche Reihen zu summiren, beruhet darauf, daß man, wie seither, die Bögen durch ihre Progressionen ausdrückt. So wird also die Summe folgender unendlichen Reihe: $A\,t\,x - \frac{1}{2^{2m+1}} \,.\, A\,t.\,2\,x$

$$+ \frac{1}{3^{2m+1}} \,.\, A\,t.\,3\,x - \&c. = \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m+1}} \,.\, A\,t.\,n\,x$$

$$= x\, \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m}} - \frac{x^3}{3} \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-2}} + \frac{x^5}{5} \Sigma \pm \frac{1}{n^{2m-4}}$$

$- \&c.$, welcher Ausdruck mit $\pm \frac{x^{2m+1}}{2m+1} \,.\, \frac{1}{2}$ aufhört.

2) Diese Reihen zu summiren ist mir noch ein anderes Verfahren beygefallen, welches ich hier anzuzeigen nicht für überflüßig halte, weil es zur Bestätigung des nur gefundenen Resultats dient, und sonst nicht gewöhnlich ist. Es ist nemlich $A\,t.\,\varphi = \text{f.}\, \frac{d\,z}{\log.\, z} \,.\, \text{sin.}\, \varphi \log.\, z$

das Integral so genommen, daß es für $z = 0$ verschwindet, und dann $z = 1$ gesetzt wird *). So erhält man also . . . $\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m+1}}$. Arc. tang. $n\varphi$

$$= \int \frac{dz}{\log. z} . \Sigma \pm \frac{\sin. n\varphi \log. z}{n^{2m+1}};$$

die Summe, welche in diesem Integral vorkommt, ist aus (III.) bekannt, und hat diese Gestalt: $A\varphi \log. z + B\varphi^3 \overline{\log. z}^3 +$ &c.; daraus wird das Integral $= A\varphi + B\varphi^3 \int dz (\log. z)^2 +$ &c. Nun ist für jedes m, $\int dz (\log. z)^m = \pm 1 . 2 . 3 .. m$ (wenn, wie sich hier gehört, der Werth von $z = 0$ bis zu $z = 1$ genommen wird): diesen Ausdruck für $m = 2, 4, 6$ u. s. w. substituirt, ergibt sich am Ende

$\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m+1}}$. Arc. t. $n\varphi$, eben so wie in (1).

3) Unter die merkwürdigsten Reihen von Bögen, deren Tangenten nach einem gewissen Gesetze fortschreiten, gehören diejenigen, welche **Euler** betrachtet und durch ein **indirektes** Verfahren summirt hat. Er erklärt sie vorzüglich deswegen aller Aufmerksamkeit werth, weil noch keine Methode bekannt sey, ihre Summen a priori zu finden **). Diesen Mangel scheint mir nachfolgendes

*) Euler. Speculat. analyt. Comment. Petr. Nov. T. XX. p. 65.

**) Euler. De progressionibus arcuum circularium, quorum tangentes secundum certam legem procedunt. Nov. Comment. Petrop. Tom. IX. p. 40. — — — — Im Anfang gibt er die Summen der Reihen an, deren allgemeines Glied A t. $\frac{1}{2n^2}$, A t. $\frac{1}{n^2+n+1}$ ist, und sagt von denselben: „Tales series

Verfahren zu ersetzen, welches noch zu viel allgemeinern Summationen führet. Es sey nemlich die Summe folgender Reihe: Arc. tang. $\frac{\varphi}{1}$ + A. t. $\frac{\varphi}{2^2}$ + A. t. $\frac{\varphi}{3^2}$ + &c. $= \Sigma A$ t. $\frac{\varphi}{n^2} = y$, so wird $dy = d\varphi \Sigma \frac{n^2}{n^4 + \varphi^2}$,

$$= \frac{d\varphi}{2} \Sigma \left(\frac{1}{n^2 - \varphi \sqrt{-1}} + \frac{1}{n^2 + \varphi \sqrt{-1}} \right).$$

Die Summen, welche in $\frac{d\varphi}{2}$ multiplicirt sind, ergeben sich aus (XI.), da $\Sigma \frac{1}{n^2 - a} = \frac{1}{2a} - \frac{\pi \sqrt{a}}{2a \operatorname{tang.} \pi \sqrt{a}}$ wobey man zu gegenwärtiger Absicht $a = \varphi \sqrt{-1}$, und $= -\varphi \sqrt{-1}$ setzt. Daraus findet man endlich, durch Integration, nach gehöriger Behandlung der unmöglichen Größen, und Bestimmung der Constante,

$$y = \frac{\pi}{4} - \text{Arc. tang.} \left(\frac{e^{\pi \sqrt{2\varphi}} - 1}{e^{\pi \sqrt{2\varphi}} + 1} . \cot. \pi \sqrt{\frac{\varphi}{2}} \right).$$

Für den Fall, dessen Euler erwähnt hat, ist $\varphi = \frac{1}{2}$, also $\cot. \pi \sqrt{\frac{\varphi}{2}} = 0$, und die Summe $= \frac{\pi}{4}$.

6) Dieses Verfahren erstreckt sich noch weiter: in den Nennern der Tangenten können nemlich statt der Qua-

eo magis videntur omni attentione dignæ, quod nulla adhuc constet methodus earum summam a priori inveniendi, atque etiam ipsi arcus omnes inter se sint incommensurabiles. Quin etiam ne exspectare quidem licet methodum, cujus ope in genere hujusmodi serierum, quamcunque legem tangentes sequantur, summa investigari queat — — Quam ob rem in hoc negotio alia via non patet, nisi ut a posteriori hujusmodi series investigemus, quarum deinceps contemplatio fortasse viam quandam directam patefaciet — —

drâte der natürlichen Zahlen, Potenzen derselben von irgend einem geraden Exponenten befindlich seyn: daß also daraus die Summation dieser unendlichen Reihe folgt:

$$\text{Arc. tang.}\ \frac{\varphi}{1^{2m}} + \text{Arc. t.}\ \frac{\varphi}{2^{2m}} + \text{A. t.}\ \frac{\varphi}{3^{2m}} \dots$$
$$+ \text{A. t.}\ \frac{\varphi}{n^{2m}} + \&c.$$

So ist zum Beyspiel für $m = 2$, $\Sigma\ \text{Arc. tang.}\ \frac{\varphi}{n^4}$
$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot \log.\left(\frac{\text{sin.}\ e\,z\ .\ \text{sin.}\ e^3\,z}{\text{sin.}\ z\ .\ \text{sin.}\ e^2\,z}\right)$, wenn $e^2 = \sqrt{-1}$, und $z = \pi \cdot \left(\frac{\varphi}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{4}}$ gesetzt wird. Der logarithmische Theil verwandelt sich bey näherer Betrachtung in einen Bogen.

9) So wie ich in (XII.) die Summation der reciproken Reihen dahin erweitert habe, daß statt $\frac{1}{n^{2m}}$ das allgemeine Glied jedwede gebrochene gerade Function des Index n seyn kann, so läßt sich auch in (8) $\Sigma\ \text{Arc. tang.}\ \frac{\varphi}{N} = y$ angeben, wenn N eine solche Function ist. Es ist nemlich $\text{d}\,y = \text{d}\,\varphi\,\Sigma\,\frac{N}{N^2 + \varphi^2}$; die Summe, welche in $\text{d}\,\varphi$ multiplicirt ist, folgt aus denen in (XII.) angestellten Betrachtungen, sie sey $= P$, eine Function von φ, so wird $y = \int P\,\text{d}\,\varphi$: die Integrale, welche dabey vorkommen, sind alle von der Form $\int \frac{\text{d}\,x}{\text{tang.}\ x} = \log.\ \text{sin.}\ x.$

So einfach und leicht zu übersehen diese allgemeine Vorstellung ist, so verwickelt werden dagegen die Rechnungen, und ihre ausführliche Entwickelung würde meine gegenwärtige Absicht überschreiten. Die Hauptschwürigkeit beruhet auf der Behandlung der unmöglichen Größen, welche alle auf die Form $A + B\sqrt{-1}$ gebracht werden müssen, daß sich zuletzt das unmögliche aufhebe, und die Summe durch einen Cirkelbogen ausgedrückt werde, welches immer angeht, wie man schon aus dem angeführten schließen kann. — Uebrigens erhellt, daß die Zeichen in der Reihe auch abwechseln, und in diesem Falle statt der geraden Potenzen der natürlichen Zahlen auch die ungeraden Potenzen der ungeraden Zahlen vorkommen können.

10) Bey der andern Reihe, die ich (in der Anm.) aus **Eulern** angeführt habe, und deren allgemeines Glied $= \text{Arc. tang.} \dfrac{1}{n^2 + n + 1}$, ist zwar N in (9) keine gerade Function von n; sie läßt sich aber doch nach eben den Gründen behandeln, und auf ähnliche Weise erweitern: es werde in den Zähler statt 1, φ und in den Nenner β gesetzt, so wird die Summe der unendlichen Reihe, deren allgemeines Glied $= \text{Arc. tang.} \dfrac{\varphi}{n^2 + n + \beta}$ ist, $=$

$$-\text{Arc. tang.} \frac{\varphi}{\beta} + \text{Arc. tang.} \left\{ \frac{e^{\frac{\pi\mu}{2}} - e^{-\frac{\pi\mu}{2}}}{e^{\frac{\pi\mu}{2}} + e^{-\frac{\pi\mu}{2}}} . \text{tang.} \frac{\pi m}{2} \right\}$$

wenn $\sqrt{(1 - 4\beta - 4\varphi\sqrt{-1})} = m - \mu\sqrt{-1}$, woraus m und μ leicht bestimmt werden können. In jenem Falle, da $\beta = \varphi = 1$, ist $m = 1$ und $\mu = 2$,

also die Summe $= \frac{\pi}{4}$. Ueberhaupt so oft $\beta = \varphi^2$ ist, wird die Summe $=$ Arc. tang. φ. Solcher Sätze lassen sich noch mehrere erweisen, und man wird leicht bemerken, wie auch diese Untersuchung noch weiter getrieben und allgemeiner gemacht werden könnte.

XX. Andere Anwendungen der Methode.

1) Aus dem was in (XIV.) ist gesagt worden, wird man leicht übersehen, daß das bisher beobachtete Verfahren noch in vielen andern Fällen, mit gehöriger Vorsicht, könne gebraucht werden, um entweder unendliche Reihen unmittelbar zu summiren, oder aus solchen, deren Summen bekannt sind, durch Verwandlung andere herzuleiten. Aus (XV.) erhellt, daß sich insbesondere dadurch unzählige Reihen ergeben, in denen die Bernoullischen Zahlen vorkommen, und welche theils convergiren, theils divergiren. Ueber Reihen dieser Art hat Euler *) eigene Untersuchungen angestellt, und Summationen herausgebracht, welche mit denen auf die angezeigte Weise gefundenen entweder verglichen werden können, oder verbunden zu neuen Resultaten. — Aus der Menge mögen einige Beyspiele genügen.

2) Wenn man in folgender unendlichen Reihe:

$$\log.(1+x) - \log.(1+2x) + \log.(1+3x) - \log.(1+4x) + \&c.$$

die Logarithmen in ihre Progressionen auflöst, so wird

*) Instit. Calc. Diff. Cap. VI. P. II; vollständiger in den Comment. Petrop. Nov. Tom. XIV. P. I.

$$\Sigma \pm \log.(1+nx) = x\frac{(2^2-1)}{2}\mathfrak{A}^I - \frac{x^3}{3}\frac{(2^4-1)}{4}\mathfrak{A}^{II}$$

$+\frac{x^5}{5}\frac{(2^6-1)}{6}\mathfrak{A}^{III}$ — &c. (nemlich die Coefficienten der geraden Potenzen von x verschwinden, und bey den ungeraden sind sie aus (XV.) bekannt). Setzt man hier $x = 1$, so folgt aus **Wallisens** unendlichem Producte für π, $\Sigma \pm \log.(1+nx) = \frac{1}{2}\log.\frac{\pi}{2}$, daß also dieser Logarithme auch die Summe der andern unendlichen Reihe für $x = 1$ ausdrückt. Verbindet man damit **Eulers** Reihe (§. 158.), so folgt daraus noch die andere:

$$\log. 2 = 1 - \frac{2^2\mathfrak{A}^I}{1.2} + \frac{2^4\mathfrak{A}^{II}}{3.4} - \frac{2^6\mathfrak{A}^{III}}{5.6} + \&c.$$

Eine zwote Folgerung ist diese: man kann die zuerst gefundene Summation durch $2S^I - S$ darstellen, wo S und $S^I = \frac{\mathfrak{A}^I}{1.2}z - \frac{\mathfrak{A}^{II}}{3.4}z^3 + \frac{\mathfrak{A}^{III}}{5.6}z^5$ — &c., dort $z = 2$, hier $z = 1$ genommen. So läßt sich das anbringen, was **Euler** (§. 157.) erwiesen hat. Die Vergleichung zeigt, daß $s = l1 + l2 + .. + lx = \log.(1.2..x) = \frac{1}{2}\log.\pi - \log.2$ seyn müsse für $x = \frac{1}{2}$, oder $1.2.3..x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, wie aus ganz andern Gründen durch die Methode der **Interpolation** gefunden worden ist *). Eine andere Reihe als die nur erwähnte für log. 2 findet sich aus $\Sigma \pm \frac{1}{n} = \log. 2$,

*) Instit. Calc. Diff. Cap. XVII. p. 835.

wenn $\frac{1}{n} = \frac{1}{(n-1)+1}$ in die bekannte Progression aufgelöst wird. So lassen sich auch aus $\Sigma \pm \frac{1}{n^2}$, überhaupt aus $\Sigma \pm \frac{1}{n^{2m}}$ neue Reihen herleiten, wenn man $\frac{1}{n^{2m}} = ((n-1)+1)^{-2m}$ durch den Binomischen Satz ausdrückt. In allen solchen Reihen kommen die Bernoullischen Zahlen vor, und ihre Summen lassen sich nach (III.) angeben. Diese Reihen selbst sind divergirende, und wie ihre Summen zu verstehen seyen, erhellt aus (XVII).

3) Da Exponentialgrößen auch in unendliche Reihen können aufgelöst werden, so läßt sich ein gleiches Verfahren auch bey diesen anwenden. So ist $e^x - e^{2x} + e^{3x} - \&c. = \frac{1}{2}\frac{(e^x-1)}{e^x+1)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + x\Sigma \pm n + \frac{x^3}{1.2.3}\Sigma \pm n^3 + \&c$; daraus fließt folgende Summation: $\frac{e^x-1}{2(e^x+1)} = \frac{x(2^2-1)}{2}\mathfrak{A}^I - \frac{x^3}{1.2.3.}\frac{(2^4-1)}{4}\mathfrak{A}^{II} + \frac{x^5}{1\ldots6}(2^6-1)\mathfrak{A}^{III} - \&c.$: welche sich mit einer ähnlichen bey **Eulern** (§. 163.) vergleichen läßt, wenn man das dortige $a = e^x$ setzt, daß $x = l\,a$ werde. Aus dieser Reihe lassen sich unzählige andre durch Differentiation und Integration herleiten.

4) Da ich im vorhergehenden (XVII.) die Summen der geraden Potenzen der ungeraden Zahlen, mit abwechselnden Zeichen, durch die Grössen $\alpha^I, \alpha^{II}, \alpha^{III}$ u. s. w.

welche den Bernoullischen Zahlen entsprechen, ausgedrückt habe, so erhellt von selbst, daß durch das bisherige Verfahren auch solche Reihen, in welchen jene als Coefficienten vorkommen, summirt werden können. So läßt sich hier (2) und (3) anbringen. Ein anderes Beyspiel ist folgendes. Man setze in der Reihe für A. t. x, $x = e^z$, und löse dann die Exponential-Größen auf, so wird die Summe der unendlichen Reihe: $\alpha^I \cdot z - \frac{\alpha^{II}}{1.2.3} \cdot z^3 + \frac{\alpha^{III}}{1\ldots5} z^5 - \&c. = \text{Arc. tang.} \frac{e^{2z}-1}{2e^z}$.

5) Merkwürdiger scheinen mir die Summationen folgender unendlicher Reihen zu seyn, welche zugleich stark convergiren. Bekanntlich ist

$$\frac{\sin. \pi x}{\pi x} = \frac{1-x^2}{1} \cdot \frac{4-x^2}{4} \cdot \frac{9-x^2}{9} \cdot \&c.$$

Man verwandle dieses unendliche Product in eine Reihe von Logarithmen, und löse diese in ihre Progressionen auf, so ergibt sich: $\log. \frac{\pi x}{\sin. \pi x} = x^2 \Sigma \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} x^4 \Sigma \frac{1}{n^4} + \frac{1}{3} x^6 \Sigma \frac{1}{n^6} + \&c.$, oder diese Summen durch die Bernoullischen Zahlen ausgedrückt, und $\pi x = z$ gesetzt,

$$\log. \frac{z}{\sin. z} = \frac{2 \mathfrak{A}^I}{1.2} z^2 + \frac{2^3 \mathfrak{A}^{II}}{1..4} \cdot \frac{z^4}{2} + \frac{2^5 \mathfrak{C}}{1..6} \cdot \frac{z^6}{3} + \&c.$$

Eben so kann man mit dem unendlichen Product verfahren, welches tang. $\frac{\pi(1+z)}{4}$ ausdrückt, wobey der allgemeine Factor $= \frac{2n-1 \pm z}{2n-1 \mp z}$ ist (die oberen Zeichen

gelten für ungerade n). — Wenn bey den Progressionen in (XIX) die Bögen durch Reihen dargestellt werden, die nach Potenzen der Tangenten fortschreiten, so erhält man aus den dortigen Summationen unzählige convergirende Reihen, in denen die Bernoullischen Zahlen vorkommen, und deren Summen angegeben werden können. So fließt aus Σ Arc. tang. $\frac{\varphi}{n^2}$ (wenn man $2^2 \pi^2 \varphi = z$ setzt, und statt der Bernoullischen Zahlen die andern A^I, A^{II} u. s. w. gebraucht, daß $\frac{\mathfrak{A}^N}{1.2.3..2n} = A^N$ werde *)) folgende Summation:

$$A^I z - \frac{1}{3} A^{III} z^3 + \frac{1}{5} A^V z^5 - \&c. = \frac{\pi}{2}$$

$$- 2 \text{ Arc. tang.} \left(\frac{e^{\sqrt{\frac{z}{2}}} - 1}{e^{\sqrt{\frac{z}{2}}} + 1} \cdot \cot. \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{z}{2}} \right)$$

Ueberhaupt erhält man so die Summen aller Reihen von der Form: $A^M z - \frac{1}{3} A^{3M} z^3 + \frac{1}{5} A^{5M} z^5 - \frac{1}{7} A^{7M} z^7 + \&c.$, welche sich von den vorhergehenden, und denen, welche Euler betrachtet hat, dadurch sehr unterscheiden, daß in ihnen nicht alle Bernoullische Zahlen vorkommen, sondern nur die m^{te}, $3\,m^{te}$, $5\,m^{te}$ u. s. w. wobey m jede ganze Zahl bedeuten kann: je größer m ist, desto schneller werden sie convergiren. Ich sehe jetzt nicht ein, wie man solche Reihen auf einem andern Wege, als diesem, summiren könnte. — Uebrigens lassen sich aus dieser und den vorhin angeführten Reihen durch Differentiation und Integration noch andere

*) Vergl. Euler I. C. D. Cap. V. P. II. p. 425.

Summationen herleiten. Das allgemeine bey diesem Reductions-Verfahren, wovon im vorhergehenden mehrere Beyspiele dargelegt sind, zeigt nachfolgende Untersuchung, welche zugleich noch zu einem andern Zwecke dient.

XXI. Reduction von Reihen mit Cosinussen und Sinussen auf andere, welche nach Potenzen von x fortgehen, und allgemeine Bemerkungen über die letztern Reihen.

1) Alle Reihen, deren allgemeines Glied = ist a^N. cos. $n\phi$, oder a^N. sin. $n\phi$; mit gleichen oder abwechselnden Zeichen, werden durch die in (XV.) gebrauchte Substitution: $e^{\phi\sqrt{-1}} = x$, in zwo andere verwandelt, deren eine zum allgemeinen Gliede $a^N x^n$ hat, die andere $a^N x^{-n}$. Es kommt also im allgemeinen darauf an, $\Sigma\, a^N x^n$ zu finden. Für den Fall, da a^N eine ganze Function von n vorstellt, ist diese Untersuchung in (XV.) ausgeführt und angewandt. Ist aber a^N eine gebrochne Function, so läßt sich $\Sigma\, a^N x^n$ immer auf rationelle Integrale zurückbringen. Dieses hat Euler zuerst vollständig gelehrt *). Eh ich sein Verfahren kennen lernte, erhielt ich jene Summation, und damit noch die Auflösung eines andern Problems, durch folgende Schlüsse, welche ich hier beyfüge, weil man daraus, wie es mir vorkommt, die ganze Sache in gehöriger Allgemeinheit

*) Comment. Petrop. T. VII. (vergl. T. VI. u. V). Einzelne Fälle des Problems haben schon Jac. Bernoulli, Moivre u. a. aufgelöst. Euler hat, wie gewöhnlich, die Untersuchungen seiner Vorgänger, allgemeiner gemacht, und was bey jenen isolirter Gedanke war, in analytische Methode verwandelt.

und Kürze übersieht, auch einen vielleicht noch nicht hinlänglich bemerkten Zusammenhang zwischen Reihen und Integrationen gewahr wird.

2) Es ist bekannt, daß wenn die Summe der unendlichen Reihe: $a + a^I x + a^{II} x^2 \ldots + a^N x^n + \&c. = S = \Sigma a^N x^n$ (Σ hier von $n = 0$ an gerechnet) als gegeben vorausgesetzt wird, daraus auch diese Reihe summirt werden könne: $a A + a^I A^I x + a^{II} A^{II} x^2 + \ldots + a^N A^N x^n + \&c. = Z$, so oft A, A^I, A^{II} u. s. w. auf verschwindende Unterschiede führen, d. i. A^N eine ganze Funktion von n ist. Es wird nemlich

$$Z = AS + \Delta A . \frac{x \, d S}{1 . d x} + \Delta^2 A . \frac{x^2 \, d^2 S}{1 . 2 . d x^2} + \&c.$$

Von der Wahrheit und Allgemeinheit dieses Satzes überzeugt man sich leicht, wenn man $A^N = A + n \Delta A + \frac{n(n-1)}{1 . 2} \Delta^2 A + \&c.$ setzt. Dadurch erhält man für $Z = \Sigma a^N A^N x^n$ einen zusammengesetzten Ausdruck, in welchem mehrere Summen vorkommen, alle von der Form: $\Sigma a^N x^n n(n-1) \ldots (n-m)$ $= x^m \Sigma a^N . x^{n-m} . n(n-1) \ldots (n-m) = \frac{x^m d^m S}{d x^m}$: der allgemeine Coefficient ist $= \frac{\Delta m A}{1 . 2 \ldots m}$ *).

3) Dieser Satz kann nach vielen Rücksichten als Fundamental-Gleichung in der Lehre von den Reihen betrachtet werden. Setzt man in (2) $a^N = 1$, so wird $S = \frac{1}{1 - x}$, woraus unmittelbar $\Sigma A^N x^n$ folgt, d. i.

*) Man vergleiche damit Eulers Beweis I. C. D. p. 311 u. f. w.

die Summation aller Reihen, deren Glieder nach Potenzen von x fortgehen, und Coefficienten enthalten, welche für sich eine algebraische Progression von irgend einer Ordnung bilden. Setzt man $S = \left(x + \frac{1}{x}\right)^r$, so ist das Problem in (VII.) auch unter dem Satze in (2) begriffen. Man erhält so einen Ausdruck für die Summe der dortigen Reihe, worin außer Differential-Verhältnissen von S, noch die Differenzen von r^q, $(r-2)^q$, $(r-4)^q$ u. s. w. vorkommen. Diese Untersuchung kann man mit der in (VII.) verbinden, woraus sich Ausdrücke der Differenzen durch Summen ergeben *).

4) Nun sey a^N in (1) $= \frac{\mathfrak{A}^N}{A^N}$, oder irgend eine gebrochne Funktion des Index n, so ist Z bekannt (nach 3. weil $a^N A^N = \mathfrak{A}^N$ eine ganze Function ist), und (nach 1) wird S gesucht. Dadurch ist das Problem in (2) umgekehrt und auf eine Differential-Gleichung von einem höhern Grade gebracht. Diese ist derjenigen ähnlich, welche **Euler** (Inst. Calc. Int. P. II. p. 471-525.) untersucht hat: auch **d'Alembert** und **de la Grange**. Diese Untersuchungen ließen sich hier anwenden: sie werden aber hier entbehrlich oder ersetzt, durch folgende Be-

*) Vergl. Euler Inst. C. D. p. 17, wo solche Ausdrücke vorkommen, jedoch nicht ganz richtige, vielleicht wegen eines Rechnungsfehlers. Die r^{te} unter den dortigen Größen α, β, γ u. s. w. womit α übereinstimmt, aber nicht β, γ, u. s. w. ist eigentlich

$$= m^{m+r-1} - \frac{m}{1}(m-1)^{m+r-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}(m-2)^{m+r-1} - \&c.$$

trachtung, welche ich deswegen anstellte, weil mir jene noch unbekannt waren. Wenn nemlich $\Delta^2 A = 0$, so ist die Differential-Gleichung vom ersten Grade, und ihre Integration leicht *). Daraus läßt sich, wenn A^N nur die erste Potenz von n enthält, oder $= \alpha + \beta n$ ist, S aus Z finden, d. i. $\Sigma \frac{\mathfrak{A}^N}{\alpha + \beta n}$ aus $\Sigma\, \mathfrak{A}^N$, wobey $\mathfrak{A}^N$ nicht gerade eine ganze Function seyn muß. Nun kann man immer A^N, wenn die Dimension von n größer als 1 ist $= m$, in m einfache Factoren $\alpha + \beta n$, $\gamma + \delta n$ &c. zerfällen. So folgt für $m = 2$, $\Sigma \frac{\mathfrak{A}^N}{(\alpha + \beta n)(\gamma + \delta n)}$ aus der nur gefundenen Summe, wenn das nunmehr gefundene S statt des bekannten Z, oder $\frac{\mathfrak{A}^N}{\alpha + n\beta}$ vor $\mathfrak{A}^N$ genommen wird. Auf ähnliche Art ergibt sich die Summe für $m = 3$ aus der nur gefundenen für $m = 2$, und so endlich die allgemeine Auflösung: es wird nemlich immer die zuletzt gefundene Summe als das bekannte Z angesehen. — Man kann durch Division mit der beständigen Größe $\mathfrak{C} = \beta . \delta . \varepsilon$. &c. der Function A^N die Gestalt geben, daß der Coefficient der höchsten Potenz von n, $= 1$ werde, oder die Factoren alle die Form $n + F$ erhalten. Man nenne den ersten $n + f^M$, den zweyten $n + f^{M-1}$ .... den letzten oder $m^{ten} = n + f^1$, so fließt aus den angezeigten Gründen leicht folgender allgemeiner Ausdruck: $S = \Sigma \frac{\mathfrak{A}^N x_n}{A^N} =$

*) Kästners Anfangsgr. d. Analys. d. Un. §. 412; das dortige n ist hier $= 0$, welches der einfachste Fall ist.

$$= \frac{1}{\mathfrak{C}} \cdot x^{-f^{I}} \cdot \int x^{f^{I} - f^{II} - 1} \cdot dx \cdot \int \ldots \ldots,$$

$$\int x^{f^{M-1} - f^{M} - 1} \cdot dx \int x^{f^{M} - 1} \cdot Z\,dx$$

wobey $Z = \Sigma\, \mathfrak{A}^{N} x^{n}$ ist. Man kann dieses zusammengesetzte Integral leicht in eine Summe von einfachen auflösen: es ist nemlich überhaupt $\int x^{p}\,dx \int P\,dx$ $= \frac{x^{p+1}}{p+1} \int P\,dx - \frac{1}{p+1} \cdot \int x^{p} P\,dx$. Unmittelbar erhält man einen Ausdruck in solchen einfachen Integralen, wenn man $\frac{1}{A^{N}}$ in Partialbrüche mit einfachen Nennern auflöst: welche Betrachtung auch gleich Anfangs zum Grunde gelegt, und so der Fall, da A^{N} mehrere Factoren hat, auf den einfachsten Fall eines einzigen Factors zurückgeführt werden kann (wovon die Untersuchung in XII. ein Beyspiel giebt).

5) Aus dem bisher gesagten übersieht man, wie, die Summe dieser Reihe: $a + a^{I} x + a^{II} x^{2} + \ldots + a^{N} x^{n} + \ldots$ angenommen, unzählige andere Reihen summirt werden können, welche entstehen, wenn man die Coefficienten von jener multiplicirt oder dividirt (oder beydes zugleich) mit solchen Größen, die für sich eine willkürliche algebraische Progression bilden: d. i. auf verschwindende Unterschiede führen. Die Summation, welche (1) fordert, fließt als ein besonderer Fall aus diesem allgemeineren Satze, wenn nemlich $a^{N} = 1$ gesetzt wird. Diese Vorstellung (wie auch 3.) bestätigt die obige Bemerkung (S. 90. **), daß die aus dem Bruche $\frac{1}{1+x}$

trachtung, welche ich deswegen anstellte, weil mir jene noch unbekannt waren. Wenn nemlich $\Delta^2 A = 0$, so ist die Differential-Gleichung vom ersten Grade, und ihre Integration leicht *). Daraus läßt sich, wenn A^N nur die erste Potenz von n enthält, oder $= \alpha + \beta n$ ist, S aus Z finden, d. i. $\Sigma \frac{\mathfrak{A}^N}{\alpha + \beta n}$ aus $\Sigma\, \mathfrak{A}^N$, wobey $\mathfrak{A}^N$ nicht gerade eine ganze Function seyn muß. Nun kann man immer A^N, wenn die Dimension von n größer als 1 ist $= m$, in m einfache Factoren $\alpha + \beta n$, $\gamma + \delta n$ &c. zerfällen. So folgt für $m = 2$, $\Sigma \frac{\mathfrak{A}^N}{(\alpha + \beta n)(\gamma + \delta n)}$ aus der nur gefundenen Summe, wenn das nunmehr gefundene S statt des bekannten Z, oder $\frac{\mathfrak{A}^N}{\alpha + n\beta}$ vor $\mathfrak{A}^N$ genommen wird. Auf ähnliche Art ergibt sich die Summe für $m = 3$ aus der nur gefundenen für $m = 2$, und so endlich die allgemeine Auflösung: es wird nemlich immer die zuletzt gefundene Summe als das bekannte Z angesehen. — Man kann durch Division mit der beständigen Größe $\mathfrak{C} = \beta . \delta . \varepsilon .$ &c. der Function A^N die Gestalt geben, daß der Coefficient der höchsten Potenz von n, $= 1$ werde, oder die Factoren alle die Form $n + F$ erhalten. Man nenne den ersten $n + f^M$, den zweyten $n + f^{M-1}$ .... den letzten oder $m^{ten} = n + f^1$, so fließt aus den angezeigten Gründen leicht folgender allgemeiner Ausdruck: $S = \Sigma \frac{\mathfrak{A}^N x_n}{A^N} =$

*) Kästners Anfangsgr. d. Analys. d. Un. §. 412; das dortige n ist hier $= 0$, welches der einfachste Fall ist.

$$= \frac{1}{\mathfrak{C}} \cdot x^{-f^{I}} \cdot \int x^{f^{I} - f^{II} - 1} \cdot dx \cdot \int \ldots\ldots,$$

$$\int x^{f^{M-1} - f^{M} - 1} \cdot dx \int x^{f^{M} - 1} \cdot Z\, dx,$$

wobey $Z = \Sigma\, \mathfrak{A}^{N} x^{n}$ ist. Man kann dieses zusammengesetzte Integral leicht in eine Summe von einfachen auflösen: es ist nemlich überhaupt $\int x^{p}\, dx \int P\, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \int P\, dx - \frac{1}{p+1} \cdot \int x^{p} P\, dx$. Unmittelbar erhält man einen Ausdruck in solchen einfachen Integralen, wenn man $\frac{1}{A^{N}}$ in Partialbrüche mit einfachen Nennern auflöst: welche Betrachtung auch gleich Anfangs zum Grunde gelegt, und so der Fall, da A^{N} mehrere Factoren hat, auf den einfachsten Fall eines einzigen Factors zurückgeführt werden kann (wovon die Untersuchung in XII. ein Beyspiel giebt).

5) Aus dem bisher gesagten übersieht man, wie, die Summe dieser Reihe: $a + a^{I} x + a^{II} x^{2} + \ldots + a^{N} x^{n} + \ldots$ angenommen, unzählige andere Reihen summirt werden können, welche entstehen, wenn man die Coefficienten von jener multiplicirt oder dividirt (oder beydes zugleich) mit solchen Grössen, die für sich eine willkürliche algebraische Progression bilden: d. i. auf verschwindende Unterschiede führen. Die Summation, welche (1) fordert, fliesst als ein besonderer Fall aus diesem allgemeineren Satze, wenn nemlich $a^{N} = 1$ gesetzt wird. Diese Vorstellung (wie auch 3.) bestätigt die obige Bemerkung (S. 90. **), dass die aus dem Bruche $\frac{1}{1+x}$

entspringende Reihe den ersten Grund aller Summationen dieser Art enthalte.

6) Zugleich führen jene Betrachtungen auf einem einfachen Wege zu der Integration der vorerwähnten Differential-Gleichung. Der Ausdruck in (4) ist nemlich das vollständige Integral der Gleichung in (2). Man gebe der Differential-Gleichung, von einem willkürlichen Grade, diese Form: $Z = By + \frac{Cx\,dy}{dx} + \frac{Dx^2\,d^2y}{dx^2} + \&c.$ so folgt aus der Vergleichung mit den dortigen Buchstaben $B = A$, $C = \Delta A$, $D = \frac{\Delta^2 A}{1.2}$, $E = \frac{\Delta^3 A}{1.2.3}$ u. s. w. Also wird, was seither A^N war, $= A + n\Delta A + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 A + \&c. = B + nC + n(n-1)D + n(n-1)(n-2)E + \&c.$ Diese Größe ist $= E(f^I + n)(f^{II} + n)\ldots(f^M + n)$. Setzt man vor n, $n-1$, so werden die Factoren des Ausdrucks: $B + (n-1)C + (n-1)(n-2)D + \&c.$, $= f^I - 1 + n, f^{II} - 1 + n$, u. s. w. Auf diese Weise stimmt gegenwärtige Integration mit derjenigen vollkommen überein, welche **Euler** aus andern Gründen gefunden hat (p. 495). Zugleich erhellt aus (4) wie man y sogleich durch einfache Integrale ausdrücken kann, ohne Verwandlungen mit den zusammengesetzten vornehmen zu müssen.

7) In der Anwendung des bisherigen auf Progressionen mit Cosinussen und Sinussen vielfacher Bögen. wird also nach (1) die Summation der Reihen mit dem allgemeinen Gliede: $a^N.\cos. n\phi$, oder $a^N.\sin. n\phi$ (wenn a^N

irgend eine gebrochne Function von n, und $n+f$ einen von den Factoren ihres Nenners vorstellt) zurückgebracht auf die Summe oder Differenz zweyer Integrale von der Form: $x^{-f} \int \frac{x^f \, dx}{1 \pm x}$, $z^{-f} \int \frac{z^f \, dz}{1 \pm z}$ $x = e^{\phi \sqrt{-1}}$, und $z = \frac{1}{x}$ gesetzt (der beständige Coefficient ist aus der Zerfällung von a^N bekannt, im Nenner gilt das obere Zeichen, wenn in der Reihe die Zeichen abwechseln, sonst das untere). Durch gehörige Verwandlungen ergibt sich die Summe der Integrale =

$$-\cos. f\phi . \int d\phi . \sec. \tfrac{1}{2}\phi . \sin. (f + \tfrac{1}{2})\phi$$
$$+ \sin. f\phi . \int d\phi \sec. \tfrac{1}{2}\phi . \cos. (f + \tfrac{1}{2})\phi,$$

für abwechselnde Zeichen; für gleiche muß in den Integralen sec. mit cosec., im ersten Theil sin. mit cos., im andern cos. mit sin. verwechselt, auch der letztere verneint genommen werden: die Factoren der Integrale bleiben. Eben so wird die Differenz jener Integrale durch $\sqrt{-1}$ dividirt, $= \sin. f\phi . \int d\phi \sin. (f + \tfrac{1}{2})\phi . \sec \tfrac{1}{2}\phi + \cos. f\phi . \int d\phi . \cos. (f + \tfrac{1}{2})\phi . \sec. \tfrac{1}{2}\phi$, für abwechselnde Zeichen; für gleiche wird die nur erwähnte Veränderung vorgenommen. Daraus folgen z. B. vermittelst gehöriger Bestimmung der Constanten, die Summationen in (XI).

8) Man kann das Verfahren in (I.) auch umkehren, und aus der bekannten Summe einer Reihe von Cosinussen und Sinussen, $\Sigma (a^N x^n \pm a^N x^{-n})$ herleiten. Da in (III. 5.) $\Sigma \pm \frac{\cos. n\phi}{n^{2m}}$ gefunden ist, so

ergibt sich daraus $\Sigma \pm \frac{x^n}{n^{2m}} + \Sigma \pm \frac{x^{-n}}{n^{2m}} = \mathfrak{S}$, wenn man $e^{\varphi\sqrt{-1}} = x$, oder $\varphi = \frac{\log. x}{\sqrt{-1}}$ setzt. Da jener Ausdruck nur gerade Potenzen von φ enthält, so wird die letztere Summe möglich, nemlich

$$\frac{\mathfrak{S}}{2} = \Sigma \pm n^{-2m} + \frac{(\log. x)^2}{1 \cdot 2} \Sigma \pm n^{-2m+2} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(\log. x)^{2m-2}}{1 \ldots 2m-2} \cdot \Sigma \pm n^{-2} + \tfrac{1}{2} \frac{\log. (x)^{2m}}{1 \ldots 2m}.$$

Daraus erhellt, daß zu jedem Werthe von x, für welchen die Summe der unendlichen Reihe: $x - \frac{x^2}{2^{2m}} + \frac{x^3}{3^{2m}} - \frac{x^4}{4^{2m}} +$ &c. bekannt ist, ein anderer, nemlich der reciproke $\frac{1}{x}$ gehöre, welcher auch eine Summe zuläßt, die aus jener durch Logarithmen, π und die Bernoullischen Zahlen gefunden werden kann Aus dem vorhergehenden ist $\Sigma \pm \frac{x^n}{n^{2m}}$ nur für $x = 1$, bekannt, wo auch $\frac{1}{x} = 1$. wird. Wenn der Exponent der Potenzen im Nenner $= 2$ ist, so läßt sich $\Sigma \pm \frac{x^n}{n^2}$ noch für $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ angeben, $= \frac{\pi^2}{15} - \frac{1}{2} (\log. x)^2$: dann ist $z = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Mithin wird auch für diesen Werth von z, die Summe $\Sigma \pm \frac{z^n}{n^2}$ bekannt, und zwar $= \frac{\pi^2}{10} + (\log. z)^2$. — Eben

so folgt aus $\Sigma \frac{\cos. n \phi}{n^{2m}}$ (in III.), $\Sigma \frac{x^n}{n^{2m}} + \Sigma \frac{x^{-n}}{n^{2m}}$, aber, wie man leicht sehen wird, unmöglich ausgedrückt. So oft also die eine Summe bekannt ist, wird es auch die andere werden. Jenes findet, bey $m = 1$, statt für $x = \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, in welchen Fällen $\Sigma \frac{x^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} (\log. 2)^2; \frac{\pi^2}{15} - \left(\log. \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2;$ $\frac{\pi^2}{30} - \left(\log. \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$ *). Daraus erhält man diese Summe auch für $x = 2, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, aber durch unmögliche Ausdrücke: es ist nemlich allgemein $\Sigma \left(\frac{x^n}{n^2} + \frac{x^{-n}}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi \log. x}{\sqrt{-1}} - \frac{(\log. x)^2}{2}$.

Es wird vielleicht auf den ersten Anblick paradox scheinen, daß so einfache Reihen, als die gegenwärtigen, für gewisse Werthe von x unmögliche Summen haben sollen. Eigentlich sind, für die angezeigten Werthe, die Reihen divergent, und haben keine wahre Summen: die auf die erwähnte Weise gefundene Ausdrücke sind nur analytisch wahr. So werden z. B. die Summen der Reihen, welche $\sqrt{(1-x)}$, $\log.(1-x)$, Arc. sin. x, ausdrücken, unmöglich, wenn $x > 1$ ist. — Uebrigens erhellt, daß aus den Reihen mit Sinussen, und aus denen, wo nur ungerade Zahlen vorkommen, ähnliche Sätze können hergeleitet werden.

*) Diese Particular-Werthe hat J. Landen zuerst bemerkt (Mathematical Memoirs 1780). Den Fall $x = \frac{1}{2}$ lehrt auch Euler Inst. C. J. P. I. p. 126.

